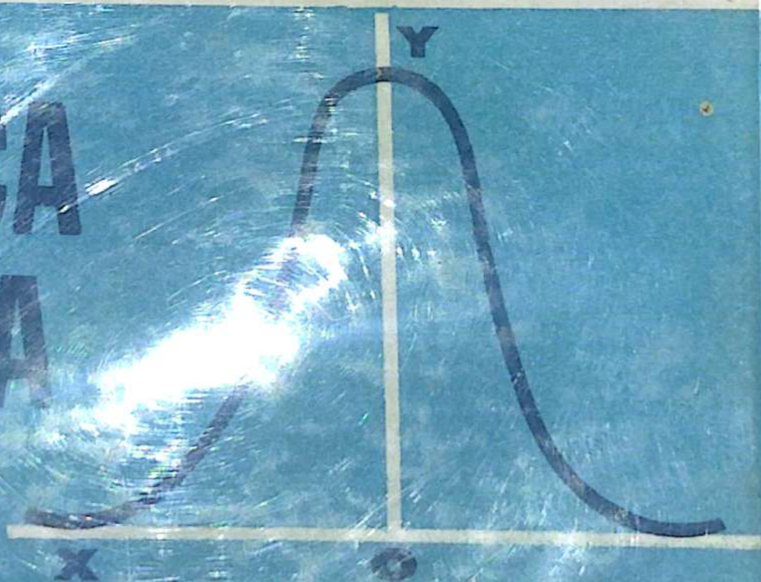
i.i = -1

REPETTO
LINSKENS
FESQUET

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA



BACHILLERATO
MAGISTERIO

4

EDITORIAL
KAPELUSZ

ARITMÉTICA
Y ÁLGEBRA

BACHILLERATO - MAGISTERIO





ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

PARA CUARTO CURSO DE BACHILLERATO Y MAGISTERIO



CELINA H. REPETTO

PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA. DOCTORA EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS. CATEDRÁTICA EN EL LICEO NACIONAL DE SEÑORITAS Nº 3, EN LA ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO Nº 5 JOSÉ DE SAN MARTÍN, EN LA ESCUELA NORMAL SARMIENTO Y EN EL INSTITUTO NACIONAL DEL PROFESORADO SECUNDARIO. PROFESOR ADJUNTO EN LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

MARCELA E. LINSKENS

PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS Y FRANCÉS. EX CATEDRÁTICA EN LA ESCUELA NACIONAL DE COMERCIO Nº 5 "JOSÉ DE SAN MARTÍN" Y EN EL COLEGIO NACIONAL Nº 1 "BERNARDINO RIVADAVIA".

HILDA B. FESQUET

MAESTRA NORMAL NACIONAL. PROFESORA DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN MATEMÁTICAS.



KAPELUSZ
EDITORES
MORENO 372 • BUENOS AIRES

Publicado en marzo de 1942.

Decimotercera edición, febrero de 1962.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

ÍNDICE

CAPÍTULO I.

RADICALES.

1. La potenciación tiene dos operaciones inversas, que son la radicación y la logaritmación.

Así, si se considera una potencia, por ejemplo:

$$2^5 = 32$$

pueden plantearse dos problemas inversos, que son:

1º Dada la potencia 32, y la base 2, encontrar el exponente 5, que indica la potencia a que hay que elevar la base 2 para obtener 32. La operación que resuelve este problema se llama *logaritmación*, y la estudiaremos más adelante.

2º Dada la potencia 32, y el exponente 5, encontrar la base, en este caso, 2, tal que elevada a la quinta potencia dé 32. La operación que resuelve este problema se llama *radicación*. El resultado, 2 en este ejemplo, es la raíz quinta de 32, y en general, según se ha visto en cursos anteriores, se da la siguiente:

DEFINICIÓN. *Dados un número real* a *y un número natural* n, *se llama raíz enésima del número* a, *al número* x, *tal que elevado a la potencia enésima dé por resultado* a.

En símbolos:

Es $\sqrt[n]{a} = x$ (que se lee: raíz enésima de a igual a x)

si $x^n = a$.

En el ejemplo anterior es: $\sqrt[5]{32} = 2$

pues $2^5 = 32$.

La operación de radicación se llama también *extracción de raíces*. El signo $\sqrt{\ }$ se llama *signo radical*, el número a, *radicando* o *cantidad subradical*, y el número *n*, *índice*.

El signo radical se representó en un principio por su letra inicial r y luego por deformaciones sucesivas de esta letra llegó a su forma actual.

Si el índice es 1, de acuerdo con la definición, el radicando coincide con la raíz; en este caso trivial, huelga escribir entonces el signo radical, en consecuencia sólo nos referiremos a radicales de índice natural $n > 1$.

La raíz de índice 2 se llama *raíz cuadrada*, y por convención, al escribirla, se suprime el índice.

Así $\sqrt{16}$ indica la raíz de índice 2, o raíz cuadrada de 16.

La raíz de índice tres se llama *raíz cúbica*; la de índice 4, *raíz cuarta*, etc.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \quad \text{pues} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = -\frac{3}{5} \quad \text{pues} \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{pues} \quad 3^4 = 81$$

y también

$$\sqrt[4]{81} = -3 \quad \text{pues} \quad (-3)^4 = 81.$$

Los ejemplos anteriores nos recuerdan la siguiente

REGLA DE LOS SIGNOS DE LA RADICACIÓN: 1º *Si el índice es impar y el radicando es positivo, la raíz es única y positiva.*

2º *Si el índice es impar y el radicando es negativo, la raíz es única y negativa.*

3º *Si el índice es par y el radicando positivo, existen dos raíces de igual valor absoluto, pero de distinto signo.*

NOTA: Ahora bien, según se ha visto en cursos anteriores, la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, no tiene como solución ningún número racional, es decir no existe ningún número entero ni fraccionario que elevado al cuadrado dé por resultado dicho número.

Por ejemplo: $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{40}$, carecen de solución entera o fraccionaria.

Para interpretar estas expresiones se crean los *números irracionales.*

Así son números irracionales:

$$\sqrt{3} \quad , \quad \sqrt{5} \quad , \quad \sqrt{31} \quad , \quad \sqrt{10} \; .$$

Además de las raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos, existen otros números irracionales tales como el número

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$

y el número $e = 2{,}71828828\ldots$

El conjunto de los números racionales e irracionales constituyen los *números reales*.

2. Caso de la imposibilidad de la operación en el campo de los números reales. — Supongamos el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{-36}$$

Según la definición, extraer esta raíz es hallar un número tal que elevado al cuadrado dé por resultado -36. A primera vista parecería que los números 6 y -6 satisfarían esta condición, pero no es así, pues:

$$6^2 = +36$$

$$\text{y} \qquad (-6)^2 = +36$$

y ningún otro número real puede ser raíz de la expresión dada, pues al elevarlo al cuadrado siempre da resultado positivo.

La observación hecha en este ejemplo es general cuando el índice es par y el radicando negativo, es decir:

Si el índice es par y el radicando es negativo, no hay solución en el campo de los números reales.

RADICALES.

3. Un radical es una raíz indicada, siempre que esa operación sea posible en el campo de los números reales. Así, por ejemplo, son radicales:

$$\sqrt{36}\ ; \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27}}\ ; \qquad \sqrt[5]{-32}\ ; \qquad \sqrt{7}\ ;$$

$$\sqrt[4]{6}\ ; \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{2}x}\ ; \qquad \sqrt{x^2+y^2}\ ; \qquad \sqrt[5]{2\,m^2\,n}\,.$$

De acuerdo con la definición, no se consideran radicales las raíces de índice par de radicandos negativos, pues, como se ha visto, la operación no es posible en el campo de los números reales.

4. **Raíz aritmética o valor aritmético de un radical.** — Anteriormente hemos observado que los radicales de índice par y radicando positivo tienen dos raíces opuestas, una positiva y una negativa. En ese caso, *la raíz positiva se llama raíz aritmética* o *valor aritmético del radical.* Por ejemplo, la raíz aritmética de $\sqrt{64}$ es 8.

En el caso de índice impar, como la raíz es única, no se presenta esta ambigüedad.

Así:

$$\sqrt[6]{729} \quad \text{tiene un resultado único que es: } 9,$$

y

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} \quad \text{tiene un resultado único que es: } -\frac{1}{2}.$$

En general, al escribir un radical de índice par consideraremos que representa su raíz aritmética.

Así, $\sqrt{16}$ representa el número 4; cuando queramos indicar las dos raíces, utilizaremos la notación $\pm\sqrt{16}$, que es igual a ± 4.

PROPIEDADES.

5. **Raíz enésima de un producto.** — Supongamos tener que extraer

$$\sqrt{4 \times 25}.$$

Para obtener el resultado efectuamos el producto indicado: $4 \times 25 = 100$ y extraemos la raíz cuadrada de este producto, es decir:

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10. \qquad [1]$$

Observamos que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{siendo } \sqrt{4} = 2 \\ \text{y } \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\} \text{ es } \sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10. \qquad [2]$$

Como los resultados de [1] y [2] son iguales, se deduce que:

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$$

o sea, que la raíz cuadrada del producto 4×25 es igual al producto de la raíz cuadrada de cada uno de esos dos factores.

Esta observación, que es válida en general y para cualquier índice, la demostraremos como propiedad en el siguiente

TEOREMA. *La raiz enésima de un producto, es igual al producto de las raíces enésimas de cada uno de los factores, siempre que las operaciones sean posibles.*

H) $\sqrt[n]{a\,b\,c}$; n número natural > 1.

T) $\sqrt[n]{a\,b\,c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$.

Demostración. Para que la igualdad de la tesis sea cierta, es decir, para que

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

sea la raíz enésima de: a b c, debe verificarse, de acuerdo con la definición de raíz enésima, que el resultado elevado a la enésima potencia sea igual al radicando, es decir:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n$$

debe ser igual al radicando a b c .

Esta igualdad se cumple efectivamente, pues:

Por la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación, se tiene:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n$$

y simplificando el índice y el exponente en cada factor del segundo miembro resulta:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n = a\,b\,c$$

igualdad que, según hemos dicho, verifica la tesis. Luego es, en efecto:

$$\sqrt[n]{a\,b\,c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

EJEMPLO 1º:

$$\sqrt[3]{0{,}125 \times \frac{1}{27} \times 8} = \sqrt[3]{0{,}125} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{8} =$$

$$= 0{,}5 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO 2º:

$$\sqrt{2x^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^4} = \sqrt{2} \cdot x^2 = x^2 \sqrt{2} \, .$$

6. OBSERVACIÓN. La propiedad que se acaba de demostrar equivale a decir que *la radicación es distributiva con respecto a la multiplicación.*

7. TEOREMA RECÍPROCO. *El producto de radicales de igual índice es igual a la raíz del mismo índice, cuyo radicando es el producto de los radicandos de los radicales dados.*

H) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$; n número natural > 1.

T) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a\,b\,c}$.

Demostración. Según el teorema anterior, es:

$$\sqrt[n]{a\,b\,c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

Luego, por carácter recíproco, resulta:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a\,b\,c} \, ,$$

que es la tesis.

EJEMPLO:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 32} = \sqrt{16} = 4$$

Observaciones: Como acabamos de ver en este ejemplo, la propiedad que estudiamos permite obtener fácilmente el resultado de algunos ejercicios que a simple vista parecería imposible calcular.

8. **Raíz enésima de un cociente.** — La radicación es también distributiva con respecto a la división. Esta propiedad se demuestra en el siguiente:

Teorema. *La raíz enésima de un cociente es igual a la raíz enésima del dividendo, dividida por la raíz enésima del divisor, siempre que las operaciones sean posibles.*

H) $\sqrt[n]{a : b}$; n número natural > 1.

T) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

Demostración. Para que la igualdad de la tesis sea cierta, es decir, para que:

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ sea la raíz enésima de $(a : b)$, debe verificarse, de acuerdo con la definición de raíz enésima que elevada a la potencia enésima dé por resultado el radicando $(a : b)$, es decir que

$$\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n$$

debe ser igual al radicando $(a : b)$.

Esta igualdad se cumple efectivamente, pues por la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división, se tiene:

$$\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n : \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

y simplificando el índice y el exponente de cada radical del segundo miembro, resulta:

$$\left(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}\right)^n = a : b$$

igualdad que, según hemos dicho, verifica la tesis. Luego es, en efecto:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

EJEMPLO 1º:

$$\sqrt{25 : 0{,}16} = \sqrt{25} : \sqrt{0{,}16} = 5 : 0{,}4 = 12{,}5$$

EJEMPLO 2º:

$$\sqrt[3]{4 : x^9} = \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{x^9} = \sqrt[3]{4} : x^3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{x^3}$$

9. TEOREMA RECÍPROCO. *El cociente de dos radicales de igual índice es igual a la raíz del mismo índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos de los radicales dados.*

H) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$; n número natural > 1.

T) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$.

Demostración. Según el teorema anterior es:

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}.$$

Luego, por carácter recíproco, resulta:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad \text{que es la tesis.}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt[4]{64} : \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{64 : 4} = \sqrt[4]{16} = 2 .$$

10. Raíz de índice *mn* de un número. — Sea, por ejemplo, extraer la raíz de índice igual al producto 3×2, del número 64, es decir:

$$\sqrt[3\times 2]{64}\,.$$

Como $3 \times 2 = 6$, podemos escribir:

$$\sqrt[3\times 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2 \qquad [1]$$

Ahora bien, si extraemos la raíz cuadrada de 64 y luego la raíz cúbica de esa raíz cuadrada, obtenemos el mismo resultado anterior, 2, pues, siendo

$$\sqrt{64} = 8,$$

es:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2\,. \qquad [2]$$

Como los resultados de [1] y [2] son iguales, se deduce que:

$$\sqrt[3\times 2]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}}\,.$$

Esta observación, que es general, se enuncia en el siguiente

TEOREMA. *La raíz de índice mn de un número es igual a la raíz emésima de la raíz enésima de dicho número.*

H) $\sqrt[mn]{a}$; m y n números naturales y mayores que 1.

T) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\,.$

Demostración. Será cierta la igualdad de la tesis, si $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ es la raíz de índice mn de a. Para que esta condición se cumpla debe verificarse, de acuerdo con la definición de raíz, que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

elevada a la potencia *mn*, dé por resultado el radicando, a, de la raíz $\sqrt[mn]{a}$ es decir:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}$$

debe ser igual que a.

En efecto, es así, pues recordando que para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes, se puede escribir:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n}$$

Simplificando en el segundo miembro la raíz emésima con la potencia emésima, se tiene:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n}$$

o sea:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}$$

y simplificando nuevamente en el segundo miembro, resulta:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a.$$

Luego: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ es efectivamente $\sqrt[mn]{a}$, es decir:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$ ∴ que es la tesis.

Observación. La propiedad que se acaba de demostrar facilita la resolución de algunos ejercicios que a primera vista resultan complejos.

Por ejemplo, sea calcular:

$$\sqrt[4]{20\,736}$$

No es fácil encontrar directamente el número cuya cuarta potencia es 20 736; pero aplicando la propiedad de referencia, la raíz cuarta puede considerarse como la raíz cuadrada de la raíz cuadrada, o sea:

$$\sqrt[4]{20\,736} = \sqrt{\sqrt{20\,736}}$$

Aplicando la regla de extracción de raíz cuadrada, se tiene:

$$\sqrt{20\,736} = 144$$

Luego:

$$\sqrt[4]{20\,736} = \sqrt{144} = 12 \, ,$$

quedando resuelto el ejercicio.

11. Teorema recíproco. *La raíz emésima de la raíz enésima de un número es igual a la raíz de índice mn de dicho número.*

H) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$; m y n números naturales y mayores que 1.

T) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Demostración. Siendo, según el teorema anterior:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

es, por carácter recíproco:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad , \quad \text{que es la tesis.}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[3\times2\times2]{x} = \sqrt[12]{x} \,.$$

12. El valor de un radical no altera si se multiplican o dividen exactamente por un mismo número el índice y el exponente.

1º Sea, por ejemplo, extraer la raíz cúbica de 1 000.

Como sabemos:

$$\sqrt[3]{1\,000} = 10 \quad \text{pues} \quad 10^3 = 1\,000 \,.$$

Reemplacemos el radicando 1 000 por su igual 10^3, es decir:

$$\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{10^3} = 10 \,. \qquad [1]$$

Si multiplicamos ahora el índice y el exponente por un mismo número, 2, por ejemplo, se tiene:

$$\sqrt[3\times2]{10^{3\times2}} = \sqrt[6]{10^6} = 10 \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta:

$$\sqrt[3]{10^3} = \sqrt[3\times2]{10^{3\times2}}$$

o sea, que el radical conserva el mismo valor después de haber multiplicado el índice y el exponente por el número 2.

2º) Sea, por ejemplo, extraer la raíz cuarta de 256.

Sabemos que:

$$\sqrt[4]{256} = 4 \quad \text{pues} \quad 4^4 = 256 .$$

Pero el radicando 256 es también la octava potencia de 2, es decir:

$$2^8 = 256$$

luego:

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 4 \qquad [3]$$

Si dividimos el índice 4 y el exponente 8 por un mismo número, 2, por ejemplo, se tiene:

$$\sqrt[4:2]{2^{8:2}} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt{16} = 4$$

es decir:

$$\sqrt[4:2]{2^{8:2}} = 4 \qquad [4]$$

De [3] y [4] resulta:

$$\sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4:2]{2^{8:2}}$$

o sea, que el radical conserva el mismo valor después de haber dividido el índice y el exponente por el número 2.

Las observaciones hechas en los dos ejemplos considerados son válidas para todo radical y cualquiera sea el número por el que se multiplica o divide el índice y el exponente. Justificaremos estas consideraciones demostrando el siguiente:

Teorema. *El valor de un radical no altera si se multiplican o dividen exactamente el índice y el exponente por un mismo número distinto de cero.*

H) $\sqrt[x]{a^y}$; x ; y ; n números naturales mayores que 1;
n divisor de x é y.

T) 1ª parte: $\sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x]{a^{y}}$

2ª parte: $\sqrt[x:n]{a^{y:n}} = \sqrt[x]{a^{y}}$

Demostración de la 1ª parte. Según un teorema anterior, la raíz xn de un número es igual a la raíz x de la raíz n de dicho número, es decir:

$$\sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{yn}}} \qquad [1]$$

pero como:

$$a^{yn} = \left(a^{y}\right)^{n}$$

reemplazando en el 2º miembro de [1], se tiene:

$$\sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{yn}}} = \sqrt[x]{\sqrt[n]{(a^{y})^{n}}} \; .$$

Simplificando en el segundo miembro la potencia enésima con la raíz enésima, queda:

$$\sqrt[x]{\sqrt[n]{a^{yn}}} = \sqrt[x]{a^{y}} \qquad [2]$$

De [1] y [2] por el carácter transitivo de la igualdad resulta:

$\sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x]{a^{y}}$, que es la primera parte de la tesis.

Demostración de la 2ª parte. Como por hipótesis n es divisor de x y de y, si designamos a los respectivos cocientes exactos por p y q, es decir:

$$x : n = p \quad ; \quad y : n = q$$

podemos escribir:

$$\sqrt[x:n]{a^{y:n}} = \sqrt[p]{a^q} \qquad [3]$$

Pero, según la primera parte de este teorema:

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pn]{a^{qn}}$$

y como siendo: $x : n = p$ es $pn = x$

y siendo $y : n = q$ es $qn = y$

reemplazando en el segundo miembro de la igualdad anterior, se tiene:

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[x]{a^y} \qquad [4]$$

Como los segundos miembros de [3] y [4], son iguales, también lo son los primeros, es decir:

$\sqrt[x:n]{a^{y:n}} = \sqrt[x]{a^y}$, que es la segunda parte de la tesis.

13. Simplificación de radicales. — Simplificar un radical es encontrar otro radical de igual valor, pero de menor índice.

Así, por ejemplo, una simplificación de $\sqrt[4]{625}$ es $\sqrt{25}$, puesto que ambos radicales tienen el mismo valor, 5, y el índice del segundo es menor que el del primero.

Para simplificar radicales, se aplica la propiedad que dice que un radical no altera si el índice y el exponente se dividen por un mismo número.

Así, en el ejemplo dado, teniendo en cuenta que $625 = 5^4$, puede escribirse:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4}$$

y dividiendo índice y exponente por 2, resulta:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4:2]{5^{4:2}} = \sqrt[2]{5^2} = \sqrt{25}$$

que es una simplificación de $\sqrt[4]{625}$.

Si hubiéramos dividido índice y exponente por 4, hubiéramos obtenido

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4:4]{5^{4:4}} = 5 .$$

Luego, 5 es otra simplificación de $\sqrt[4]{625}$.

Según acabamos de ver, resulta que: En general, *para simplificar un radical, se dividen el índice y el exponente por un mismo número.*

EJEMPLO 1º:

Simplificar: $\sqrt[15]{a^{12}}$

Como el índice 15 y el exponente 12 admiten el divisor 3, podemos simplicar así:

$$\sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[15:3]{a^{12:3}} = \sqrt[5]{a^4}$$

En este caso, es la única simplificación posible, pues, aparte de la unidad, 3 es el único divisor común de 15 y 12.

EJEMPLO 2º:

Simplificar el radical $\sqrt[6]{\frac{1}{36} m^{12} x^8 y^2}$

Es evidente que $\sqrt[6]{\frac{1}{36} m^{12} x^8 y^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{6}\right)^2 m^{12} x^8 y^2}$

Observamos que los exponentes de todos los factores del radicando y el índice tienen el divisor común 2. Luego, aplicando las propiedades estudiadas podemos escribir:

$$\sqrt[6]{\frac{1}{36} m^{12} x^8 y^2} = \sqrt[6:2]{\left(\frac{1}{6}\right)^{2:2} m^{12:2} \quad x^{8:2} \; y^{2:2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6} \; m^6 \, x^4 \, y}$$

Es evidente que la mayor simplificación de un radical se obtiene dividiendo índice y exponente por su máximo común divisor. En este caso se dice que el radical se ha reducido a su más simple expresión.

EJEMPLO:

Sea reducir a su menor expresión: $\sqrt[18]{x^{30}}$

El M. C. D. entre 18 y 30 es 6. Luego, la más simple expresión del radical dado es:

$$\sqrt[18]{x^{30}} = \sqrt[18:6]{x^{30:6}} = \sqrt[3]{x^5}$$

14. **Reducción de radicales a común índice.** — Así como entre los números fraccionarios existe la reducción de los mismos a común denominador, entre los radicales existe la reducción a común índice; esta reducción es necesaria en ciertos casos para calcular el resultado de algunas operaciones con radicales.

Reducir dos o más radicales a común índice es encontrar otros tantos radicales tales que tengan todos el mismo índice y sean respectivamente iguales a los dados.

EJEMPLO:

Dados los radicales:

$$\sqrt{100} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

los radicales:

$$\sqrt[8]{100\,000\,000} \quad \text{y} \quad \sqrt[8]{\frac{1}{256}}$$

son los radicales dados reducidos a común índice.

En efecto, el índice de ambos es el mismo número 8, y además:

$$\sqrt{100} = \sqrt[8]{100\,000\,000} = 10 ,$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{256}} = \frac{1}{2} .$$

También

$$\sqrt[4]{10\,000} \quad y \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

son reducciones de los radicales dados a común índice, pues, tienen el mismo índice 4, y además:

$$\sqrt{100} = \sqrt[4]{10\,000} = 10$$

y

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Se comprende que el índice común debe ser múltiplo de los índices dados y como dos o más números tienen infinitos múltiplos comunes, dados dos o más radicales pueden hacerse infinitas reducciones a común índice. Y es inmediato también que para efectuar la reducción a común índice se aplica la propiedad que dice: un radical no altera si se multiplican el índice y el exponente por un mismo número.

15. **Reducción de radicales a mínimo común índice.** — De todas las reducciones a común índice que pueden hacerse de dos o más radicales, interesa en particular la que hace corresponder menor índice. En el ejemplo anterior es la que hace corresponder el índice 4.

Dicho índice se llama *mínimo común índice* de los radicales dados, y es el mínimo común múltiplo de los índices de esos radicales. Luego:

Reducir dos o más radicales a mínimo común índice es encontrar otros tantos radicales respectivamente iguales a los dados que tengan por índice común, el mínimo común múltiplo de los índices dados.

EJEMPLO:

Sea reducir a mínimo común índice los siguientes radicales

$$\sqrt[6]{a^5} \quad ; \quad \sqrt[4]{2} \text{ y } \quad \sqrt[3]{x^2} .$$

El m. c. m. de los índices 6, 4 y 3, es 12. Luego, 12 es el mínimo común índice buscado.

Para reducir a índice 12 cada uno de los radicales dados, se aplica según hemos visto la propiedad que dice que: un radical no altera si se multiplican el índice y el exponente por un mismo número.

Consideremos el primer radical: $\sqrt[6]{a^5}$. Para pasar del índice 6 al índice 12, es necesario multiplicar 6 por $(12 : 6) = 2$. Luego el exponente debe multiplicarse también por 2, es decir:

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6\times2]{a^{5\times2}} = \sqrt[12]{a^{10}} .$$

En forma análoga se procede para los otros radicales. Es decir:

Como

$$12 : 4 = 3 \quad \text{es} \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^{1\times3}} = \sqrt[12]{2^3}$$

y como

$$12 : 3 = 4 \quad \text{es} \quad \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{x^{2\times4}} = \sqrt[12]{x^8}$$

El procedimiento seguido en este ejemplo es general y se enuncia en la siguiente:

REGLA. *Para reducir radicales a mínimo común índice se forman otros tantos radicales que tengan por índice el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales dados y cuyos exponentes se obtienen multiplicando los exponentes de los radicandos dados por el cociente de dividir el mínimo común índice por el índice del radical correspondiente.*

OBSERVACIÓN. En la práctica, cuando se tienen que reducir radicales a común índice, se elige la reducción a mínimo común índice, pues este procedimiento simplifica los cálculos, de ahí que hayamos enunciado la regla para ese caso particular, siendo válida la misma para la reducción a común índice cuando en lugar del mínimo común múltiplo de los índices se considera un múltiplo cualquiera de los mismos.

16. Extracción de factores fuera del radical. — Sea, por ejemplo, el radical:

$$\sqrt[4]{x^4\, y^8\, k^{-12}\, z^3}\ .$$

Aplicando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación, puede escribirse:

$$\sqrt[4]{x^4\, y^8\, k^{-12}\, z^3} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y^8} \cdot \sqrt[4]{k^{-12}} \cdot \sqrt[4]{z^3} \qquad [1]$$

Pero los tres primeros radicales del segundo miembro se pueden simplificar, dividiendo por 4 índice y exponente; se tiene así:

$$\sqrt[4]{x^4} = x$$

$$\sqrt[4]{y^8} = \sqrt[4:4]{y^{8:4}} = y^2$$

$$\sqrt[4]{k^{-12}} = \sqrt[4:4]{k^{-12:4}} = k^{-3}$$

Luego, sustituyendo en [1]

$$\sqrt[4]{x^4\, y^8\, k^{-12}\, z^3} = x\ y^2\, k^{-3}\ \sqrt[4]{z^3}\ .$$

En el segundo miembro de esta última igualdad, los factores x, y, k figuran fuera del radical. Esta operación se llama *extracción de factores fuera del radical*, y se observa que los exponentes 1, 2 y — 3 con que salen esos factores, son los cocientes de dividir sus respectivos exponentes 4, 8 y — 12 por el índice 4.

Supongamos ahora el siguiente radical:

$$\sqrt[3]{a^{14}}$$

En este caso, la simplificación no es evidente, porque el exponente 14 no es múltiplo del índice 3. Pero como 14 es mayor que 3, el radicando a^{14} puede considerarse como producto de dos potencias de a, una de las cuales tiene por exponente el mayor múltiplo de 3 contenido en 14, que es 12, y la otra tiene por exponente el resto 2; es decir:

$$a^{14} = a^{12} \cdot a^2$$

Luego:

$$\sqrt[3]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^{12}\, a^2}$$

y aplicando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación, en el segundo miembro, se tiene:

$$\sqrt[3]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^{12}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \qquad [2]$$

Simplificando el primer radical del 2º miembro:

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$$

y sustituyendo en [2], resulta

$$\sqrt[3]{a^{14}} = a^4 \sqrt[3]{a^2}$$

donde se ha extraído el factor a, fuera del radical.

Observemos que el exponente 4 con que se saca el factor a, es el cociente entero de dividir el exponente 14 por el índice 3, y el exponente 2 con que queda dentro del radical, es el resto de esa división.

El razonamiento seguido en los dos ejemplos anteriores es general y nos dice que: *los factores que figuran en el radicando con un exponente de valor absoluto igual o mayor que el índice, pueden extraerse fuera del radical. Cada uno de esos factores se escribe fuera del radical con un exponente. igual al cociente entre el exponente*

con que figuraba en el radicando y el índice, y dentro del radical con un exponente igual al resto de esa división.

OBSERVACIONES. 1º Si el exponente con que figura el factor en el radicando es múltiplo del índice, como ocurrió en el primer ejemplo, no queda bajo el radical ninguna potencia de ese factor, pues, de acuerdo con la regla figuraría con exponente cero.

2º Los factores que tienen exponente menor que el índice no pueden extraerse fuera del radical y permanecen invariables.

EJEMPLO 1º:

Extraer todos los factores posibles fuera del siguiente radical

$$\sqrt{3\,a^8\,b^7\,c}\,.$$

De los cuatro factores del radicando, los únicos que pueden extraerse fuera del radical son a^8 y b^7, pues, los otros factores, 3 y c, tienen exponente menor que el índice 2. Luego,

siendo: $8 : 2 = 4$ y resto 0, el factor a sale fuera del radical con exponente 4 y no figura más dentro del mismo;

siendo: $7 : 2 = 3$ y resto 1; el factor b sale con exponente 3 fuera del radical y queda bajo el mismo con exponente 1, es decir:

$$\sqrt{3\,a^8\,b^7\,c} = a^4\,b^3.\sqrt{3\,b\,c}$$

EJEMPLO 2º:

Extraer todos los factores posibles fuera del siguiente radical:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}\,x^{-8}\,y^2}\,.$$

Observemos que el número $\frac{8}{27}$ es el cubo de $\frac{2}{3}$, luego:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^{-8}y^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 x^{-8}y^2}.$$

Los dos primeros factores pueden extraerse fuera del radical, aplicando la regla enunciada. Se obtiene así:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}x^{-8}y^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 x^{-8}y^2} = \frac{2}{3}x^{-2}\sqrt[3]{x^{-2}y^2}.$$

EJEMPLO 3º:

Extraer todos los factores posibles fuera del siguiente radical:

$$\sqrt[5]{-64\,m^3 n^7}$$

Siendo $64 = 2^6$, se tiene:

$$\sqrt[5]{-64\,m^3 n^7} = \sqrt[5]{-2^6 m^3 n^7}$$

Extrayendo los factores 2 y n fuera del radical, resulta:

$$\sqrt[5]{-64\,m^3 n^7} = \sqrt[5]{-2^6 m^3 n^7} = 2\,n\,\sqrt[5]{-2\,m^3 n^2}.$$

OBSERVACIÓN. En los ejemplos anteriores, los coeficientes numéricos son potencias que se calculan mentalmente; pueden presentarse coeficientes más complejos, en cuyo caso, conviene factorearlos para conocer los factores numéricos que pueden extraerse fuera del radical.

EJEMPLO:

Extraer todos los factores posibles fuera del siguiente radical:

$$\sqrt{504\,y^5 z^1}$$

En este caso, es preciso factorear el coeficiente 504, para conocer las potencias de los números primos y de exponente mayor que 2 que en él figuran.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$\therefore \quad 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

Luego, en el radical dado, los factores numéricos que pueden extraerse son 2 y 3, y los literales z é y. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\sqrt{504\, y^5 z^4} = \sqrt{2^3 \times 3^2 \times 7\, y^5 z^4} = 2 \times 3\, y^2 z^2 \sqrt{2 \times 7\, y} =$$

$$= 6\, y^2 z^2 \sqrt{14 y}\,.$$

17. Introducción de factores dentro del radical. — Dada la expresión: $x^2 \sqrt[3]{a}$ se trata de introducir dentro del radical el factor x^2 que figura fuera de él.

Si se escribe x^2 debajo del radical de índice 3, se le extrae la raíz cúbica; luego, para que la expresión quede invariable, es necesario, al mismo tiempo elevar dicho factor al cubo. Es decir:

$$x^2 \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a\,(x^2)^3}$$

o sea:

$$x^2 \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a x^6}\,.$$

Se observa que el exponente 6 con que figura el factor x dentro del radical, es el producto del exponente 2 que tenía, por el índice 3.

Este razonamiento nos conduce, en general, al enunciado de la siguiente

REGLA: *Para introducir un factor dentro de un radical, se escribe dicho factor con un exponente igual al producto del exponente que tenía fuera del radical por el índice de éste.*

EJEMPLO:

Introducir dentro del siguiente radical todos los factores que figuran fuera de él.

$$2\,a^3\,b^{-2}\,c\,\sqrt[4]{5\,c^3}$$

De acuerdo con la regla enunciada, se tiene:

$$2\,a^3\,b^{-2}\,c\,\sqrt[4]{5\,c^3} = \sqrt[4]{5\,c^3\,2^{1\times 4}\,a^{3\times 4}\,b^{-2\times 4}\,c^{1\times 4}} =$$
$$= \sqrt[4]{5\,c^3\,2^4\,a^{12}\,b^{-8}\,c^4}\,.$$

Pero:

$$5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$$

y

$$c^3\,c^4 = c^7$$

Luego:

$$2\,a^3\,b^{-2}\,c\,\sqrt[4]{5\,c^3} = \sqrt[4]{80\,c^7\,a^{12}\,b^{-8}}\,.$$

OPERACIONES CON RADICALES.

18. **Radicales semejantes.** — Dos o más radicales se dicen semejantes cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

EJEMPLO:

Son radicales semejantes:

$$\sqrt[3]{2\,a^2}\;;\quad -\frac{1}{5}\sqrt[3]{2\,a^2}\;;\quad b\sqrt[3]{2\,a^2}\,.$$

De la definición se deduce que los radicales semejantes pueden diferir en el coeficiente y el signo, entendiéndose por coeficiente de un radical los factores que figuran fuera de él. Así en los radicales anteriores, el coeficiente del primero es 1; el del segundo $-\frac{1}{5}$ y el del tercero, b.

19. **Suma de radicales semejantes.** — Por analogía con la suma de monomios semejantes, resulta que la suma de dos o más radicales semejantes, se obtiene según la siguiente

Regla. *La suma de dos o más radicales semejantes es otro radical semejante con ellos, cuyo coeficiente y signo resulta de la suma de los coeficientes de los radicales dados, con sus respectivos signos.*

Ejemplo:

Sea sumar los radicales:

$$2\sqrt{3a} \quad ; \quad -7\sqrt{3a} \quad ; \quad \sqrt{3a}$$

Aplicando la regla, se tiene:

$$2\sqrt{3a} + (-7\sqrt{3a}) + \sqrt{3a} = (2 - 7 + 1)\sqrt{3a} = -4\sqrt{3a}$$

20. Resta de radicales semejantes. — Teniendo en cuenta, como en la resta de monomios semejantes, que la resta se transforma en suma agregando al minuendo, el sustraendo cambiado de signo, es inmediata la siguiente

Regla: *Para restar dos radicales semejantes, se suma al radical minuendo, el sustraendo cambiado de signo.*

Ejemplo:

Calcular la diferencia entre los radicales:

$$3\sqrt[5]{2x^2} \quad y \quad -\frac{1}{4}\sqrt[5]{2x^2}$$

Aplicando la regla:

$$-3\sqrt[5]{2x^2} - \left(-\frac{1}{4}\sqrt[5]{2x^2}\right) = -3\sqrt[5]{2x^2} + \frac{1}{4}\sqrt[5]{2x^2} =$$

$$= \left(-3 + \frac{1}{4}\right)\sqrt[5]{2x^2} = -\frac{11}{4}\sqrt[5]{2x^2}$$

21. Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, pueden efectuarse ejercicios combinados de sumas y restas de radicales, o sea de sumas algebraicas.

 Ejemplo 1º:

$$-5\sqrt[l]{a}+\frac{3}{2}\sqrt[l]{a}-\sqrt[l]{a}+2\sqrt[l]{a}=$$

$$=\left(-5+\frac{3}{2}-1+2\right)\sqrt[l]{a}=-\frac{5}{2}\sqrt[l]{a}$$

Ejemplo 2º:

$$3n\sqrt[3]{x+y}-n\sqrt[3]{x+y}-\frac{n}{3}\sqrt[3]{x+y}=$$

$$=\left(3n-n-\frac{n}{3}\right)\sqrt[3]{x+y}=\frac{5}{3}n\sqrt[3]{x+y}$$

Observación: En la práctica, se presenta a veces el caso de sumar o restar radicales que, aparentemente, no son semejantes, pero que pueden transformarse en tales, mediante extracción de factores o simplificaciones.

Ejemplo 1º:

Sumar $\sqrt{20}$; $\frac{1}{3}\sqrt{45}$; $2\sqrt{125}$

Como:

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{45}=\frac{1}{3}\sqrt{9\times 5}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

y $$2\sqrt{125}=2\sqrt{25\times 5}=2\times 5\sqrt{5}=10\sqrt{5}$$

Resulta:

$$\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}+10\sqrt{5}=$$

$$=(2+1+10)\sqrt{5}=13\sqrt{5}$$

EJEMPLO 2º:

De $\sqrt[3]{8\,a^5}$ restar: $-\frac{1}{3}\sqrt[6]{a^4}$.

Extrayendo factores en el primer radical, se tiene:

$$\sqrt[3]{8\,a^5} = 2\,a\,\sqrt[3]{a^2}$$

Simplificando índice y exponente en el segundo radical, resulta:

$$-\frac{1}{3}\sqrt[6]{a^4} = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2}.$$

Luego:

$$\sqrt[3]{8\,a^2} - \left(-\frac{1}{3}\sqrt[6]{a^4}\right) = 2\,a\,\sqrt[3]{a^2} - \left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2}\right) =$$

$$= 2\,a\,\sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2} = \left(2\,a + \frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{a^2}.$$

22. Multiplicación de radicales. — Sea multiplicar los radicales:

$$\left(-2\sqrt[3]{a}\right) \quad y \quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{a\,x}$$

La operación se indica:

$$\left(-2\sqrt[3]{a}\right) \times \frac{3}{4}\sqrt[3]{a\,x}$$

Pero esta operación puede interpretarse como la multiplicación de los factores: (-2) ; $\sqrt[3]{a}$; $\frac{3}{4}$; $\sqrt[3]{a\,x}$.

Luego, aplicando la propiedad conmutativa:

$$\left(-2\sqrt[3]{a}\right)\times\frac{3}{4}\sqrt[3]{a\,x}=(-2)\times\frac{3}{4}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a\,x} \qquad [1]$$

Pero $(-2)\times\dfrac{3}{4}=-\dfrac{2\times 3}{4}=-\dfrac{3}{2}$

y teniendo en cuenta en los dos últimos factores la propiedad recíproca de la distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación, es:

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a\,x}=\sqrt[3]{a\,a\,x}=\sqrt[3]{a^2\,x}$$

Sustituyendo en [1]:

$$\left(-2\sqrt[3]{a}\right)\times\frac{3}{4}\sqrt[3]{a\,x}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2\,x}$$

Se observa que el producto de estos radicales de índice 3 es otro radical de índice 3, cuyo signo se determina de acuerdo con la regla de los signos de la multiplicación, cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes dados y cuyo radicando $a^2\,x$ es el producto de los radicandos dados a y $a\,x$.

Pero puede ocurrir que los radicales que se deben multiplicar tengan índices diferentes.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{9}\sqrt{a\,b}\times\frac{3}{8}\sqrt[3]{a\,b^2\,c}$$

Este ejercicio se transforma en otro del mismo tipo que el anterior, reduciendo a común índice los radicales

$$\sqrt{a\,b}\ \text{ y }\ \sqrt[3]{a\,b^2\,c}\,.$$

El mínimo común índice es, en este caso: $2\times 3=6$.

Por lo tanto, aplicando la regla correspondiente:

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt[6]{a^3\,b^3}$$

y

$$\sqrt[3]{a\,b^2\,c} = \sqrt[6]{a^2\,b^4\,c^2}$$

Luego:

$$\frac{2}{9}\sqrt{a\,b} \times \frac{3}{8}\sqrt[3]{a\,b^2\,c} = \frac{2}{9}\sqrt[6]{a^3\,b^3} \times \frac{3}{8}\sqrt[6]{a^2\,b^4\,c^2} =$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{3}{8}\sqrt[6]{a^3\,b^3\,a^2\,b^4\,c^2} = \frac{1}{12}\sqrt[6]{a^5\,b^7\,c^2}$$

y extrayendo el factor b fuera del radical, resulta en definitiva:

$$\frac{2}{9}\sqrt{a\,b} \times \frac{3}{8}\sqrt[3]{a\,b^2\,c} = \frac{1}{12}\,b\sqrt[6]{a^5\,b\,c^2}$$

Las observaciones hechas en estos ejemplos se generalizan en la siguiente.

REGLA: *El producto de dos o más radicales de igual índice es otro radical del mismo índice, cuyo signo resulta de aplicar la regla de los signos de la multiplicación; cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes dados y cuyo radicando es el producto de los radicandos.*

Si los radicales factores tienen distinto índice, se reducen previamente a mínimo común índice, y se obtiene su producto de acuerdo con la regla anterior.

23. División de radicales. — Siendo la división la operación inversa de la multiplicación, las consideraciones hechas para la multiplicación de radicales son análogas a las que corresponden en la división, y se resumen en la siguiente

REGLA: *El cociente de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice, cuyo signo resulta de aplicar la regla de los signos de la división; cuyo coeficiente es el cociente entre el coeficiente del dividendo y el del divisor y cuyo radicando es el cociente de los radicandos dados.*

Si los radicales dados tienen distinto índice, se reducen previamente a mínimo común índice y luego se aplica la regla anterior.

EJEMPLO 1º:

$$\left(-2\sqrt[7]{m^5x^2}\right) : 5\sqrt[7]{m\,y}\,.$$

Aplicando la regla dada:

$$\left(-2\sqrt[7]{m^5x^2}\right) : 5\sqrt[7]{m\,y} = -\frac{2}{5}\sqrt[7]{\frac{m^5x^2}{m\,y}} = -\frac{2}{5}\sqrt[7]{\frac{m^4x^2}{y}}$$

resultado que también puede expresarse:

$$-\frac{2}{5}\sqrt[7]{m^4x^2y^{-1}}\,.$$

EJEMPLO 2º:

$$2a\sqrt[4]{3x^2y} : \frac{6a^2}{b}\sqrt[6]{x^5y^2}\,.$$

En este caso es necesario reducir previamente los radicales a mínimo común índice:

Siendo 12 el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es:

$$\sqrt[4]{3x^2y} = \sqrt[12]{3^3x^6y^3}$$

y

$$\sqrt[6]{x^5y^2} = \sqrt[12]{x^{10}y^4}$$

Luego:

$$2\,a\sqrt[4]{3\,x^2\,y} : \frac{6\,a^2}{b}\sqrt[6]{x^5\,y^2} = 2\,a\sqrt[12]{27\,x^6\,y^3} : \frac{6\,a^2}{b}\sqrt[12]{x^{10}\,y^4} =$$

$$= \frac{2\,a\,b}{6\,a^2}\sqrt[12]{\frac{27\,x^6\,y^3}{x^{10}\,y^4}} = \frac{b}{3\,a}\sqrt[12]{\frac{27}{x^4\,y}}$$

24. Racionalización de denominadores. — Dada una fracción en cuyo denominador figura un radical, *racionalizar el denominador* de dicha fracción es encontrar otra fracción igual a la dada, en cuyo denominador no figura ningún radical.

Así, por ejemplo, dadas las fracciones:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

esta última proviene de racionalizar el denominador de la primera.

En efecto es así, pues en el denominador de $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ no figura ningún radical, y además las dos fracciones son iguales, es decir:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \text{pues:} \begin{cases} 3 \times 2 = 6 \\ \text{y también:} \\ \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2^2} = 6 \end{cases}$$

Para racionalizar denominadores pueden presentarse distintos casos, que pasamos a considerar:

25. 1er. caso. El denominador es un radical único.

Ejemplo 1º:

Sea racionalizar el denominador de:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^2}}$$

Si el radicando del denominador fuese x^5 en lugar de x^2, podría simplificarse índice y exponente, quedando racionalizado el denominador.

Ahora bien, para pasar de x^2 a x^5 es necesario multiplicar por x^3, y como x está bajo el signo radical de índice 5, el factor x^3 debe quedar también bajo ese mismo radical, es decir, es necesario multiplicar por $\sqrt[5]{x^3}$. Pero al multiplicar el denominador por $\sqrt[5]{x^3}$, para que la fracción no altere, habrá que multiplicar también el numerador por $\sqrt[5]{x^3}$. Es decir:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{a\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^3}} .$$

Efectuando el producto de radicales indicado en el denominador, se tiene:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{a\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} ,$$

y simplificando índice y exponente en el denominador del segundo miembro, resulta:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{a\sqrt[5]{x^3}}{x} .$$

Luego:

$$\frac{a\sqrt[5]{x^5}}{x}$$

es la fracción dada con su denominador racionalizado.

Observamos que el factor $\sqrt[5]{x^3}$ por el que se multiplican el numerador y el denominador es un radical de índice igual al dado, y cuyo exponente 3 se obtiene restando del índice 5, el exponente 2, del radicando.

Ejemplo 2º:

Racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{5x}{\sqrt[8]{3a^3b^6c^4}}$$

Razonando como en el ejemplo anterior, para racionalizar el denominador hay que multiplicar por

$$\sqrt[8]{3^{(8-1)}} \quad ; \quad \sqrt[8]{a^{(8-3)}} \quad ; \quad \sqrt[8]{b^{(8-6)}} \quad y \quad \sqrt[8]{c^{(8-4)}} \ ;$$

o sea por

$$\sqrt[8]{3^7} \quad ; \quad \sqrt[8]{a^5} \quad ; \quad \sqrt[8]{b^2} \quad y \quad \sqrt[8]{c^4} \ ,$$

es decir por

$$\sqrt[8]{3^7\, a^5\, b^2\, c^4} \ .$$

Luego:

$$\frac{5\,x}{\sqrt[8]{3\,a^3\,b^6\,c^4}} = \frac{5\,x\ \sqrt[8]{3^7\,a^5\,b^2\,c^4}}{\sqrt[8]{3\,a^3\,b^6\,c^4}\ \sqrt[8]{3^7\,a^5\,b^2\,c^4}} = \frac{5\,x\ \sqrt[8]{3^7\,a^5\,b^2\,c^4}}{\sqrt[8]{3^8\,a^8\,b^8\,c^8}}$$

Simplificando en el último denominador y efectuando operaciones, resulta:

$$\frac{5\,x}{\sqrt[8]{3\,a^3\,b^6\,c^4}} = \frac{5\,x\,\sqrt[8]{3^7\,a^5\,b^2\,c^4}}{3\,a\,b\,c}$$

Ejemplo 3º:

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{2\ n}{\sqrt[6]{a^6\ b^8\ c^5}}$$

Vemos que en este denominador los factores a y b pueden extraerse fuera del radical, es decir:

$$\frac{2\ n}{\sqrt[6]{a^6\ b^8\ c^5}} = \frac{2\ n}{a\,b\,\sqrt[6]{b^2\ c^5}}$$

Razonando como en el ejercicio anterior, se observa que para racionalizar el denominador es necesario multipilicar por: $\sqrt[6]{b^{(6-2)}}$ y $\sqrt[6]{c^{(6-5)}}$, o sea, por $\sqrt[6]{b^4}$ y $\sqrt[6]{c}$, es decir, por: $\sqrt[6]{b^4\,c}$.

Luego:

$$\frac{2\,n}{\sqrt[6]{a^6\,b^8\,c^5}} = \frac{2\,n\,\sqrt[6]{b^4\,c}}{a\,b\,\sqrt[6]{b^2\,c^5}\cdot\sqrt[6]{b^4\,c}} = \frac{2\,n\,\sqrt[6]{b^4\,c}}{a\,b\,\sqrt[6]{b^6\,c^6}}$$

simplificando en el último denominador y efectuando operaciones, resulta:

$$\frac{2\,n}{\sqrt[6]{a^6\,b^8\,c^5}} = \frac{2\,n\,\sqrt[6]{b^4\,c}}{a\,b\,b\,c} = \frac{2\,n\,\sqrt[6]{b^4\,c}}{a\,b^2\,c}$$

quedando así racionalizado el denominador de la fracción dada.

Las observaciones hechas en los ejemplos anteriores se generalizan en la siguiente

Regla: *Para racionalizar el denominador de una fracción, cuando es un radical único, se efectúa previamente la extracción de factores fuera del radical, siempre que esta operación sea posible, y luego se multiplica el numerador y el denominador por el radical de igual índice que el dado, en el que figuran todos los factores que han quedado bajo el signo radical con un exponente igual a la diferencia entre el índice y sus respectivos exponentes.*

Ejemplo:

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{3\,a}{m\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^9}}$$

El factor que puede extraerse fuera del radical es z. Luego:

$$\frac{3\,a}{m\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^9}} = \frac{3\,a}{m\,z\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^2}}$$

Según la regla dada, para racionalizar, es necesario multiplicar numerador y denominador por

$$\sqrt[7]{2^6\,x^2\,y^4\,z^5}\,.$$

Luego:

$$\frac{3\,a}{m\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^9}} = \frac{3\,a\,\sqrt[7]{2^6\,x^2\,y^4\,z^5}}{m\,z\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^2}\cdot\sqrt[7]{2^6\,x^2\,y^4\,z^5}} =$$

$$= \frac{3\,a\,\sqrt[7]{64\,x^2\,y^4\,z^5}}{m\,z\,\sqrt[7]{2^7\,x^7\,y^7\,z^7}} = \frac{3\,a\,\sqrt[7]{64\,x^2\,y^4\,z^5}}{m\,z\cdot 2\,x\,y\,z}$$

y finalmente:

$$\frac{3\,a}{m\,\sqrt[7]{2\,x^5\,y^3\,z^9}} = \frac{3\,a\,\sqrt[7]{64\,x^2\,y^4\,z^5}}{2\,m\,x\,y\,z^2}\,.$$

26. OBSERVACIÓN 1ª: Si una vez extraídos todos los factores posibles fuera del radical, queda en el denominador un radical de índice 2, de acuerdo con la regla anterior se deduce que para racionalizar basta multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por ese mismo radical.

EJEMPLO 1º:

Sea racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{n}{\sqrt{3\,a}}$$

Aplicando la regla, es necesario multiplicar numerador y denominador por

$$\sqrt{3^{2-1}\,a^{2-1}} = \sqrt{3\,a}$$

que es el mismo radical del denominador.

Luego:

$$\frac{n}{\sqrt{3\,a}} = \frac{n\sqrt{3\,a}}{\sqrt{3\,a}\cdot\sqrt{3\,a}} = \frac{n\sqrt{3\,a}}{(\sqrt{3\,a})^2} = \frac{n\sqrt{3\,a}}{3\,a}\,.$$

EJEMPLO 2º:

Sea racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

Aplicando la regla, es inmediato que para racionalizar el denominador basta multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$.

Luego:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} .$$

EJEMPLO 3º:

Sea racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{2a}{\sqrt{5x^3}} .$$

Primero es preciso extraer el factor x fuera del radical; se tiene así:

$$\frac{2a}{\sqrt{5x^3}} = \frac{2a}{x\sqrt{5x}}$$

Para racionalizar basta multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{5x}$. Resulta así:

$$\frac{2a}{\sqrt{5x^3}} = \frac{2a\ \sqrt{5x}}{x\sqrt{5x}\ \sqrt{5x}} = \frac{2a\ \sqrt{5x}}{x\,(\sqrt{5x})^2} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{5x}}{x \cdot 5x} = \frac{2a\sqrt{5x}}{5x^2}$$

27. Observación 2ª: Cuando en el radicando del denominador figura un número compuesto, es necesario previamente factorearlo, es decir, descomponerlo en sus factores primos, para saber por qué factores hay que multiplicarlo para racionalizar.

Ejemplo:

Sea racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{12}}$$

como $12 = 2^2 \times 3$, se tiene que:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{12}} = \frac{a}{\sqrt[5]{2^2 \times 3}}.$$

En consecuencia, hay que multiplicar numerador y denominador por

$$\sqrt[5]{2^3 \times 3^4}$$

es decir:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{12}} = \frac{a\sqrt[5]{2^3 \times 3^4}}{\sqrt[5]{2^2 \times 3} \times \sqrt[5]{2^3 \times 3^4}} = \frac{a\sqrt[5]{2^3 \times 3^4}}{\sqrt[5]{2^5 \times 3^5}} =$$

$$= \frac{a\sqrt[5]{2^3 \times 3^4}}{2 \times 3} = \frac{a\sqrt[5]{2^3 \times 3^4}}{6}$$

Cuando el número que figura en el radicando es grande, el factoreo no puede hacerse mentalmente.

Ejemplo:

Sea racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[7]{648\,a^5\,b}}.$$

Factoreando el número 648, resulta:

648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$\therefore \qquad 648 = 2^3 \times 3^4$$

Luego:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{648\,a^5\,b}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^3 \times 3^4\,a^5\,b}}$$

Por lo tanto, para racionalizar hay que multiplicar por

$$\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}$$

es decir:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{648\,a^5\,b}} = \frac{\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}}{\sqrt[7]{2^3 \times 3^4\,a^5\,b}\;\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}} = \frac{\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}}{\sqrt[7]{2^7 \times 3^7\,a^7\,b^7}} =$$

$$= \frac{\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}}{2 \times 3\,a\,b} = \frac{\sqrt[7]{2^4 \times 3^3\,a^2\,b^6}}{6\,a\,b}.$$

28. **2º caso. El denominador es un binomio con un término racional y el otro irracional cuadrático.**

Un ejemplo de este caso es:

$$\frac{7}{a + \sqrt{3}}.$$

El radical del denominador podría simplificarse si $\sqrt{3}$ figurara elevado al cuadrado.

Observemos que el denominador es la suma de dos números: a y $\sqrt{3}$ y recordando que el producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de sus cuadrados, al multiplicar el numerador y el denominador por: $a - \sqrt{3}$ resulta:

$$\frac{7}{a + \sqrt{3}} = \frac{7(a - \sqrt{3})}{(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3})} = \frac{7(a - \sqrt{3})}{a^2 - (\sqrt{3})^2} .$$

Simplificando el segundo término del denominador:

$$\frac{7}{a + \sqrt{3}} = \frac{7(a - \sqrt{3})}{a^2 - 3}$$

y queda así racionalizado el denominador.

Si el binomio denominador es una diferencia, es evidente que se debe multiplicar el numerador y el denominador por la suma de esos números.

EJEMPLO:

Sea racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} .$$

En este caso se debe multiplicar numerador y denominador por

$$\sqrt{5} + 1 .$$

Luego:

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} .$$

De acuerdo con estas consideraciones, se enuncia la siguiente

REGLA: *Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio con un término racional y el otro irracional cuadrático, se multiplican numerador y denominador por la diferencia de los términos del denominador, si el binomio que en él figura es suma, o por la suma de esos números, si dicho binomio es diferencia.*

EJEMPLO:

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{3m}{5\sqrt{ab} - x}.$$

Como el binomio denominador es diferencia, debemos multiplicar ambos términos de la fracción por la suma:

$$(5\sqrt{ab} + x).$$

Luego:

$$\frac{3m}{5\sqrt{ab} - x} = \frac{3m(5\sqrt{ab} + x)}{(5\sqrt{ab} - x)(5\sqrt{ab} + x)} = \frac{3m(5\sqrt{ab} + x)}{(5\sqrt{ab})^2 - x^2}$$

y como

$$(5\sqrt{ab})^2 = 5^2(\sqrt{ab})^2 = 25\,ab$$

reemplazando, resulta:

$$\frac{3m}{5\sqrt{ab} - x} = \frac{3m(5\sqrt{ab} + x)}{25\,ab - x^2}.$$

29. **3er. caso. El denominador es un binomio cuyos dos términos son irracionales cuadráticos.**

Haciendo consideraciones semejantes a las del caso anterior, se deduce la siguiente

REGLA: *Para racionalizar el denominador de una fracción, cuando ese denominador es un binomio cuyos dos términos son irracionales cuadráticos, se multiplican numerador y denominador de la fracción por la diferencia de los términos del denominador, si el binomio que en él figura es suma, o por la suma de esos términos, si dicho binomio es diferencia.*

EJEMPLO 1º:

Sea racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{a}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Como el denominador es un binomio suma, deben multiplicarse ambos términos de la fracción por el binomio diferencia:

$$(\sqrt{7}-\sqrt{3}).$$

Luego:

$$\frac{a}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = \frac{a(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}.$$

EJEMPLO 2º:

Sea racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}.$$

Para racionalizar se multiplica el numerador y el denominador por

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6})$$

Luego:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{5-6}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{-1}=-\sqrt{5}-\sqrt{6}.$$

EJEMPLO 3º:

Racionalizar el denominador de la siguiente fracción:

$$\frac{4\,a}{\sqrt{2\,n}+2\sqrt{x\,y}}.$$

Como el denominador es un binomio suma, debemos multiplicar ambos términos de la fracción por el binomio diferencia:

$$(\sqrt{2\,n}-2\sqrt{x\,y})$$

Luego:

$$\frac{4\,a}{\sqrt{2n}+2\sqrt{xy}}=\frac{4\,a(\sqrt{2\,n}-2\sqrt{xy})}{(\sqrt{2\,n}+2\sqrt{xy})\;(\sqrt{2\,n}-2\sqrt{xy})}=$$

$$=\frac{4\,a\,(\sqrt{2\,n}-2\sqrt{xy})}{2\,n-4\,xy}.$$

Esta expresión, en la que ya está racionalizado el denominador, puede simplificarse por 2, y resulta finalmente:

$$\frac{4\,a}{\sqrt{2n}+2\sqrt{xy}}=\frac{2\,a\,(\sqrt{2\,n}-2\sqrt{xy})}{n-2\,xy}.$$

EJEMPLO 4º:

Racionalizar el denominador de la fracción:

$$\frac{x + 3a}{\sqrt{5b} - \sqrt{c}}.$$

En este caso, el denominador es una diferencia; luego debemos multiplicar ambos términos de la fracción por el binomio suma:

$$(\sqrt{5b} + \sqrt{c})$$

Se obtiene así:

$$\frac{x + 3a}{\sqrt{5b} - \sqrt{c}} = \frac{(x + 3a)\ (\sqrt{5b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{5b} - \sqrt{c})\ (\sqrt{5b} + \sqrt{c})} =$$

$$= \frac{(x + 3a)\ (\sqrt{5b} + \sqrt{c})}{5b - c}.$$

EJEMPLO 5º:

Si la fracción cuyo denominador se desea racionalizar es de la forma siguiente:

$$\frac{ab}{-\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

se puede escribir:

$$\frac{ab}{-\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{ab}{-(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = -\frac{ab}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

fracción análoga a la del ejemplo primero.

Luego, multiplicando numerador y denominador por:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

resulta:

$$\frac{a\,b}{-\sqrt{x}-\sqrt{y}} = -\frac{a\,b\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

que se puede escribir

$$\frac{a\,b\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{y-x}\,.$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Calcular las siguientes raíces de acuerdo con la definición:

1º). $\sqrt[5]{1}$

2º). $\sqrt[10]{1}$

3º). $\sqrt[7]{-1}$

4º). $\sqrt{0{,}01}$

5º). $\sqrt{49}$

6º). $\sqrt{121}$

7º). $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

8º). $\sqrt[6]{-0{,}008}$

9º). $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

10º). $\sqrt[5]{32}$

11º). $\sqrt[5]{-32}$

12º). $\sqrt{1{,}44}$

13º). $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

14º). $\sqrt[3]{1\,000}$

15º). $\sqrt[3]{0{,}001}$

16º). $\sqrt{0{,}04}$

17º). $\sqrt{0{,}09}$

18º). $\sqrt[3]{0{,}008}$

19º). $\sqrt{0{,}25}$

20º). $\sqrt[3]{-0{,}027}$

21º). $\sqrt[4]{0{,}0001}$

22º). $\sqrt[5]{-0{,}00032}$

23º). $\sqrt{1{,}21}$

24º). $\sqrt{2{,}25}$

25º). $\sqrt[4]{0{,}0625}$

26º). $\sqrt{\frac{1}{100}}$

27º). $\sqrt[3]{0{,}2^6}$

28º). $\sqrt{3^4}$

29º). $\sqrt{(1+0{,}5)^2}$

30º). $\sqrt[3]{(2-1{,}2)^3}$

31º). $\sqrt[5]{-a^5}$

32º). $\sqrt[3]{(2\,x^2)^3}$

33º). $\sqrt[3]{(-a\,x)^3}$

34º). $\sqrt[4]{(a^2)^4}$ 35º). $\sqrt{(a+b)^2}$ 36º). $\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+b)^3}}$

37º). $\sqrt{\dfrac{0{,}04}{(x-y)^4}}$

Resolver los siguientes ejercicios aplicando en los casos que corresponda, la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación y a la división:

1º). $\sqrt{16 \times 121}$

2º). $\sqrt[3]{0{,}008 \times 125\,(-27)}$

3º). $\sqrt{0{,}5^2 \times 1{,}69}$

4º). $\sqrt[3]{0{,}001 \times 0{,}064}$

5º). $\sqrt[5]{32\,(-243)}$

6º). $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16} \times 81}$

7º). $\sqrt{2^2\,a^4\,x^6}$

8º). $\sqrt{\dfrac{1}{25}\,x^8\,y^6}$

9º). $\sqrt[3]{-27\,m^3\,n^9}$

10º). $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}\,(n+y)^5}$

11º). $\sqrt[3]{-64\,(m-y)^3}$

12º). $\sqrt[4]{0{,}0001\,(a-2\,b)^3}$

13º). $\sqrt{\dfrac{1}{100}\,a^4\,x^6\,x^8}$

14º). $\sqrt[3]{1\,000\,m^3\,n^6\,y^9}$

15º). $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}\,a^{4n}\,b^{16}\,x^{8m}}$

16º). $\sqrt[5]{243\,(a+b)^{10x}}$

17º). $\sqrt{0{,}04\,x^2\,y^4}$

18º). $\sqrt[3]{-0{,}027\,a^2\,b^5\,c^3}$

19º). $\sqrt{\dfrac{4}{25}\,a^2\,x^{10}}$

20º). $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}\,m^3\,n^{12}}$

21º). $\sqrt{2-\dfrac{7}{4}}$

22º). $\sqrt{\dfrac{1}{9} \times 0{,}01}$

23º): $\sqrt{\dfrac{11}{4}-\dfrac{1}{2}}$

24º). $\sqrt{1-0{,}6^2}$

25º). $\sqrt[3]{\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}}$

26º). $\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^3}$

27º). $\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{8}{5}}$

28º). $\sqrt{\left(1+\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}$

29º). $\sqrt{a^2\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)}$

30). $-2\sqrt{\frac{9}{4}m^2-1,5\,mn^2+0,25\,n^4}$

31º). $\sqrt{a^{-4}b^6}$

32º). $\sqrt[3]{0,5^{-3}x^{-6}}$

33º). $a\sqrt[3]{(-a)^{-3}b^3}$

34º). $0,2\,a^2x\sqrt{0,04\,a^{-2}x^{-4}}$

35º). $\sqrt[5]{a^{-10x}m^{-5}n^{-5}y}$

36º). $\sqrt[3]{125\,(a+b-c)^{-3}}$

37º). $\sqrt{\frac{0,25}{49}}$

38º). $\sqrt[3]{\frac{0,02\,(-0,4)}{125}}$

39º). $\sqrt{\frac{1-0,64}{2,21-1}}$

40º). $\sqrt[3]{\frac{(1-0,7)^3}{3+\frac{3}{8}}}$

41º). $\sqrt[3]{-\frac{125\times 4}{32\times 27}}$

42º). $\sqrt{\frac{3,6\,(-0,1)}{\frac{3}{4}-1}}$

43º). $\sqrt{\frac{25\,x^8}{49\,a^{10}}}$

44º). $\sqrt[4]{\frac{a^4b^8}{81\,x^4}}$

45º). $\sqrt[5]{-\frac{m^{10}n^5}{32\,x^{15}}}$

46º). $\sqrt{\frac{a^4m^2}{49\,x^8}}$

47º). $\sqrt[3]{\frac{x^3y^6z^9}{27\,m^3}}$

48º). $\sqrt{0,01\,m^8:\frac{1}{4}n^4}$

49º). $\sqrt[4]{\frac{a^4m^4x^{12}}{81\,(x+y)^4}}$

50º). $\sqrt[5]{\frac{32\,m^{20}x^{10}}{(m-n)^{15}}}$

51º). $\sqrt[3]{(a+b)^3:(a-b)^3}$

52º). $\sqrt[n]{\frac{a^nb^{2n}x^{2n}}{(a+b)^n}}$

53º). $\sqrt[2n]{\frac{(x+y)^{4n}}{(x^2-y^2)^{2n}}}$

54º). $\sqrt{\frac{1}{x^2+2\,xy+y^2}}$

55º). $\sqrt[3]{\dfrac{a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3}{27(a^2 - b^2)^3}}$

56º). $\sqrt[3]{\dfrac{(a-b)^9}{0{,}1^3}}$

57º). $2a\sqrt{\dfrac{0{,}09\,x^4}{a^2 n^8}}$

58º). $2\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{(\sqrt{3})^3}{8}}$

59º). $-\sqrt[3]{\dfrac{32\,a^{-5}x^{-10}}{m^{15}}}$

60º). $\sqrt[3]{-\dfrac{0{,}001\,m^9 n^{-6}}{27\,x^{-12}}}$

61º). $\sqrt[3]{-\left[\dfrac{0{,}027\,a^6 b^3}{(m-n)^3}\right]^{-3}}$

62º). $\sqrt[4]{\left(\dfrac{4a^{-2}x}{25\,b^4 y^{-4}}\right)^2}$

63º). $-\sqrt[n]{\left(\dfrac{a^{2n} b^{-3n}}{x^{4n} y^{-n}}\right)^{-1}}$

Resolver los siguientes ejercicios aplicando la propiedad recíproca de la distributiva con respecto a la multiplicación y a la división:

1º). $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$

2º). $\sqrt[5]{-16}\cdot\sqrt[5]{2}$

3º). $\sqrt[3]{0{,}1}\cdot\sqrt[3]{-0{,}08}$

4º). $\sqrt{-2a}\cdot\sqrt{-32a}$

5º). $\sqrt[4]{9m^2}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot\sqrt[4]{3m^5 n^4}$

6º). $\sqrt[3]{0{,}1}\cdot\sqrt[3]{0{,}03}\cdot\sqrt[3]{9}$

7º). $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}a^2 b}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}ab^2}\cdot\sqrt[3]{9x^6}$

8º). $\sqrt[4]{a^{-1}x}\cdot\sqrt[4]{a^5 x^{-5}}$

9º). $\sqrt[3]{-\dfrac{3}{5}m^{-2}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{15}m^{-5}n^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}m^{-2}n^{-2}}$

10º). $\sqrt{32} : \sqrt{2}$

11º). $\sqrt[3]{-81} : \sqrt[3]{3}$

12º). $\sqrt{-4} : \sqrt{-1}$

13º). $\sqrt[4]{3a^7 b^4} : \sqrt[4]{\dfrac{1}{432}a^3}$

14º). $\sqrt[5]{-32m^{11}} : \sqrt[5]{mn^{-35}}$

15º). $\sqrt{0{,}144\,a^{-3}b^{-5}} : \sqrt{0{,}1\,ab^{-1}}$

16º). $\sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{-2}$

17º). $\dfrac{\sqrt[6]{0{,}01\, m n^{-4}}}{\sqrt[3]{0{,}64\, m^4 n^2}}$ 18º). $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{2}{15} a^{-1} x^3}}{\sqrt[6]{\dfrac{50}{3} a^5 x^6}}$

19º). $\dfrac{\sqrt[4]{-\dfrac{16}{5} a^{-3} b^{-3} c^{-3}}}{\sqrt[4]{-0{,}2\, a^5 b^{-3} c}}$

Aplicando raíz enésima de raíz emésima, calcular:

1º). $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ 2º). $\sqrt{\sqrt{0{,}0001}}$

3º). $\sqrt{\sqrt{\dfrac{16}{81}}}$ 4º). $\sqrt{\sqrt{a^4}}$

5º). $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-1}}$ 6º). $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{256}}}}$

7º). $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x^{30}}}}$ 8º). $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{36} b^{12}}}$

9º). $\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^{-12}}}$ 10º). $\sqrt[4]{\sqrt[3]{m^3 n^{-14}}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{m^5 n^2}}$

11º). $\sqrt[3]{\sqrt{-2ab}} \cdot \sqrt[6]{-32 a^5 b^{11}}$ 12º). $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-1}} \cdot \sqrt[9]{a^{18} x^{-9}}$

13º). $\sqrt[6]{\sqrt[5]{-\dfrac{m^{15}}{n^{32}}}} \cdot \sqrt[15]{-n^{-13}}$ 14º). $\sqrt{\sqrt{6\,561}}$

15º). $\sqrt[4]{14\,641}$ 16º). $\sqrt[8]{5\,764\,801}$ 17º). $\sqrt[3]{729}$

18º). $\sqrt[10]{1\,024}$ 19º). $\sqrt[4]{1\,296}$ 20º). $\sqrt[3]{1\,679\,616}$

21º). $\sqrt[4]{92{,}3521}$ 22º). $\sqrt[6]{0{,}531\,441}$

Mediante simplificaciones, reducir el índice de los siguientes radicales:

1º). $\sqrt[4]{a^2 b^4}$ 2º). $\sqrt[3]{125\,x^{12}\,y^3}$ 3º). $\sqrt[4]{\dfrac{m^2\,b^6}{36\,n^2}}$

4º). $\sqrt[3]{\dfrac{m^3}{27\,n^9}}$ 5º). $\sqrt[9]{0{,}001}$ 6º). $\sqrt[10]{100\,000}$

7º). $\sqrt[10]{\dfrac{1}{32}\,a^5\,m^{15}}$ 8º). $\sqrt[4]{\dfrac{9}{100}\,(x+y)^2}$

9º). $\sqrt[2n]{a^n\,b^{2n}\,c^{3n}}$ 10º). $\sqrt{1{,}69\,a^{-4}x^2\,b^{-2}}$

11º). $\sqrt[4]{0{,}0016\,a^{-12}\,x^4\,z^{-20}}$

Reducir a mínimo común índice los radicales:

1º). $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[6]{c}$

2º). $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{6}$

3º). $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[6]{5}$

4º). $\sqrt[3]{2\,a}$; $\sqrt[6]{5\,x^2}$; $\sqrt[9]{\dfrac{1}{2}\,y^2}$

5º). $\sqrt[4]{0{,}1\,a^2\,m}$; $\sqrt[8]{5\,a}$; $\sqrt{3\,a}$

6º). $\sqrt[3]{2\,xy}$; $\sqrt{3\,xy}$

7º). $\sqrt[6]{a^3\,b}$; $\sqrt[10]{b^4\,c}$; $\sqrt{c}$

8º). $\sqrt[8]{0{,}5}$; $\sqrt[6]{5\,a}$

9º). $\sqrt[3]{0{,}1}$; $\sqrt[4]{2\,a}$; $\sqrt{a+x}$; $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}$

10º). $\sqrt[15]{c^{-2}}$; $\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt[3]{ab}$; $\sqrt[10]{0,1\,x^{-3}}$

11º). $\sqrt[3]{3x}$; $\sqrt[6]{5a^5}$; $\sqrt[9]{2,5}$

12º). $\sqrt{0,5\,a^{-3}}$; $\sqrt[4]{0,1\,b^{-1}}$; $\sqrt[9]{c^{-5}}$

13º). $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4}$; $a\sqrt[9]{2x^5}$; $3x\sqrt[18]{x^{-5}}$

14º). $5\sqrt[4]{x^{-3}}$; $\sqrt[3]{-a^2}$; $-2\sqrt{a+b}$; $ab\sqrt[6]{2}$

15º). $\sqrt[5]{3m^3}$; $3\sqrt{5mn}$; $\frac{m}{2}\sqrt[10]{(m-1)^{-3}}$; $\sqrt[4]{4}$

16º). $\sqrt[n]{x}$; $\sqrt[2m]{yz}$; $\sqrt{xyz}$

17º). $\sqrt[m]{2x^2y^3}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{2}y}$; $\sqrt{\frac{a}{b}(a+b)}$

18º). $\sqrt[12]{a^7b}$; $\sqrt[15]{\frac{a^4x}{m^8n^2}}$; $\sqrt[30]{\frac{1}{x+y-2}}$

Extraer todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales:

1º). $\sqrt{4x^2y^4z}$ 2º). $\sqrt[3]{125\,a^6b^3c^2}$ 3º). $\sqrt{0,04\,a^4bx^8}$

4º). $\sqrt[4]{a^4x^{12}y^8}$ 5º). $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}m^3n^6x^{21}}$ 6º). $\sqrt[5]{32\,a^{10}b^5c^{15}}$

7º). $\sqrt[7]{-a^7x^{14}y^{21}}$ 8º). $\sqrt[6]{30\,m^2a^6b^{30}}$ 9º). $\sqrt[3]{9x^3y^6x^{15}}$

10º). $\sqrt{\frac{16}{25}a^4b^{10}c}$ 11º). $\sqrt[3]{-0,001\,m^9x^{12}}$ 12º). $\sqrt{0,25\,a^8b^2c}$

13º). $\sqrt[3]{\frac{8}{27}n^9m^2}$ 14º). $\sqrt{50\,p^4s^{10}c^2}$ 15º). $\sqrt[4]{48\,a^8x^{20}y^4z^3}$

16º). $\sqrt[3]{-54\,x^2y^3x^6}$ 17º). $\sqrt{80\,x^4n^3y}$ 18º). $\sqrt{\frac{20}{9}am^{18}x^2}$

19º). $\sqrt[3]{\frac{10}{81} a^2 b^6 c^3 d^{30}}$ 20º). $\sqrt[3]{\frac{0,125}{128} x^2 y^9 z^3}$

21º). $\sqrt[4]{\frac{96}{5} m^3 x^4 p q^{12}}$ 22º). $\sqrt[3]{\frac{1}{108} a^6 x^3 b^2 c}$

23º). $\sqrt{0,4\, x y^8 z^4}$ 24º). $\sqrt{432\, a^3 b^2}$ 25º). $\sqrt{x^5 y^7 x^4 p^2}$

26º). $\sqrt{0,04\, a^2 b^5 c^9}$ 27º). $\sqrt[3]{250\, a^2 b^4 c^8 d^5}$ 28º). $\sqrt[3]{-512\, a^3 m^{17} n^8 x^{10}}$

29º). $\sqrt[3]{8\, a^7 x^5 b^2 c}$ 30º). $\sqrt[5]{64\, a^9 b^7 c^5 d^3}$ 31º). $\sqrt[4]{a^3 c^8 b^{18} y^{10} z^9}$

32º). $\sqrt[4]{162\, x^2 y^5 m^{11} n^7 z^6}$ 33º). $\sqrt[3]{-54\, x^8 z^{28} n^2}$

34º). $4\sqrt[6]{18\, a^7 b^6 m^{15} n^{11} c^{26}}$ 35º). $yz \sqrt[3]{\frac{9}{64} x y^3 z^5 b^7}$

36º). $\frac{1}{3} a^2 \sqrt{2\,025\, a^3 b}$ 37º). $-\sqrt[5]{-\frac{32}{25} a^{10} b^9 c^7 d^5}$

38º). $\sqrt{0,064\, m^8 n^{10} a^5 b^4 c^3}$ 39º). $\frac{a}{x}\sqrt[3]{3\,456\, x^{11} a^{16}}$

40º). $\sqrt[4]{\frac{0,0625}{96} a^5 x^7 b^6 y^4 z^{10}}$ 41º). $\frac{1}{4}\sqrt{0,16\, x^2 y^{-2} z^{-6}}$

42º). $\sqrt[3]{-0,8\, a^{-6} b^{10} c^{-1}}$ 43º). $\sqrt[4]{\frac{81}{625} a^{-3} m^{-4} n^{-8}}$

44º). $\sqrt{2\,268\, x^{-1} y^3 z^{-5}}$ 45º). $a\sqrt[5]{0,64\, a^{-7} b^{-3}}$ 46º). $\sqrt[3]{24\, a^{-5} b^4 c^{-3} d^{-2}}$

47º). $\sqrt[4]{\frac{32}{3\,125} a^{-5} b^{-9} x^{-7} y^{-3}}$ 48º). $\sqrt[3]{-2\,000\, a^{-9} x^{-7}}$

49º). $m\sqrt[5]{15\, m^{-11} x^{-8} p^{-5}}$ 50º). $5x\sqrt{\frac{12}{125} x^{-3} y^{-4} z^6 k^7}$

51º). $\sqrt[4]{a^{-9} b^4 c^{-10} d^{-4} e^{-11}}$ 52º). $2mn\sqrt[5]{-\frac{5}{288} m^{-6} n^{-8} a^{-10} x^{-14}}$

53º). $\sqrt[3]{-0,008\, x^{-12} y^{-10} h^7 n^{-3}}$ 54º). $\sqrt[3]{\frac{297}{320} a^{-4} b^{-2} c^{-3} m^{-6} n^{-5}}$

55º). $\sqrt{\dfrac{a^2 b^4 c}{x^8 y^6 z}}$ 56º). $\sqrt[3]{\dfrac{27 a^6 m^3 n^2}{392 b^9 c}}$ 57º). $\sqrt[4]{\dfrac{144 x^5 y^4}{625 a^8 b^7 c^3}}$

58º). $\sqrt{-\dfrac{a^3 b^{10} m^9 n^7}{x^8 y^6 z^5 k^{11}}}$ 59º). $\sqrt{\dfrac{a^2 x^4 b^5}{729 m^3 c^7 d^4 n^6}}$ 60º). $\sqrt{\dfrac{675 (a^2 - b)^2}{(a + b)^4}}$

61º). $\sqrt[4]{\dfrac{80 (2 - a)^4}{a^8 b^5}}$ 62º). $\sqrt{\dfrac{0{,}9 x^5 n^{-3}}{2(a - 1)^2}}$ 63º). $\sqrt[3]{-\dfrac{24 a^{-3} b^{-1}}{m^5 x^{-6} z^{-4}}}$

64º). $-\dfrac{2}{ab}\sqrt[5]{\dfrac{a^5 b^{-7}}{64 m^8 n^{-6}}}$ 65º). $\sqrt[2n]{\dfrac{a^{2n} b^3}{m^{3n} x^{4n} z}}$ 66º). $\sqrt[n]{\dfrac{2 x^{3n} b^{n}}{c^{4n} z}}$

67º). $\sqrt{a^2 - 2a + 1}$ Rta.: $(a - 1)$

68º). $\sqrt[3]{(x + 1)^2 (x^5 + 1)}$ Rta.: $(x + 1) \sqrt[3]{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}$

69º). $\sqrt{(9a - 9x)(a^2 - x^2)}$ Rta.: $3(a - x)\sqrt{a + x}$

70º). $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3a^3 - 9a^2 n + 9an^2 - 3n^3}$ Rta.: $\dfrac{a - n}{3}\sqrt[3]{3}$

71º). $\sqrt{\dfrac{1}{b^2 c^2} - \dfrac{2}{abc^2} + \dfrac{1}{a^2 c^2}}$ Rta.: $\dfrac{a - b}{abc}$

72º). $\sqrt{\dfrac{a - 2}{a} + \dfrac{a + 2}{a^2 + a} - \dfrac{a}{a^2 + 2a + 1}}$ Rta.: $\dfrac{a}{a + 1}$

73º). $\sqrt{\dfrac{a^2 - 6a + 9}{(a + 3)^2} \times \dfrac{a^2 - 9}{a^3 - 3a^2}}$ Rta.: $\dfrac{a - 3}{a\sqrt{a + 3}}$

74º). $\sqrt{\dfrac{a^3 b - abx^2 - a^2 bx + bx^3}{ab^5 + b^5 x}}$ Rta.: $\dfrac{a - x}{b^2}$

Introducir dentro del radical todos los factores que figuran fuera de él, en cada uno de los ejemplos siguientes:

1º). $2\sqrt{3}$ 2º). $3ab\sqrt[3]{a^2 b}$ 3º). $x^2\sqrt{0{,}5}$ 4º). $2a^3\sqrt{a}$

5º). $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{8}$ 6º). $a^2 b^3 c\sqrt[5]{abx}$ 7º). $0{,}1 a^2 m^3\sqrt[3]{axm^2}$

8º). $\dfrac{5a}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{5}}$ 9º). $\dfrac{x^3}{m^2}\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{4}}$ 10º). $\dfrac{2}{3}a^2 x^3\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}a^3 x^2}$

11º). $\frac{1}{5} xz^2 \sqrt[3]{\frac{25}{2} xz^2 n}$ 12º). $\frac{3}{4} ab^2 x \sqrt{\frac{2}{3} ab^{-1} x}$

13º). $2 a^2 b \sqrt[5]{2 a^4 c}$ 14º). $0,1 a^3 x^2 b \sqrt[6]{1\,000 a^5 b^4 x^2}$

15º). $ax^2 yb^3 \sqrt[7]{\frac{a^2 x^3}{yb^5}}$ 16º). $\frac{1}{2} a^{-3} b \sqrt[8]{4 abx}$ 17º). $0,2 x^{-3} \sqrt{\frac{n}{x}}$

18º). $a^{-5} x^{-1} \sqrt{x^{-2}}$ 19º). $\frac{mx^2}{y^{-3}} \sqrt{x+y}$ 20º). $\frac{2}{x^{-3}} \sqrt{\frac{x^{-5}}{5}}$

21º). $\frac{a^3 b^4}{0,2} \sqrt{1,6 ab^{-1}}$ 22º). $(a+b)\sqrt{2}$ 23º). $\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt[5]{5 a^2}$

24º). $(x-3)\sqrt{\frac{1}{x^3-9}}$

Sumar los radicales que figuran en cada uno de los siguientes ejercicios:

1º). $3\sqrt{5}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ $-\sqrt{5}$

2º). $\frac{1}{3}\sqrt[3]{a}$ $-2\sqrt[3]{a}$ $\frac{1}{5}\sqrt[3]{a}$

3º). $2x\sqrt{3a}$ $\frac{3}{5}x\sqrt{3a}$ $9x\sqrt{3a}$ $\frac{1}{3}x\sqrt{3a}$

4º). $-\frac{5}{2}x^3\sqrt{2}$ $\frac{1}{3}x^3\sqrt{2}$ $2x^3\sqrt{2}$ $-5x^2\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}x^2\sqrt{2}$

5º). $3m\sqrt[5]{x+y}$ $-\frac{1}{5}m\sqrt[5]{x+y}$ $-2m\sqrt[5]{x+y}$
$m\sqrt[5]{x+y}$

6º). $2\sqrt[4]{abc^3}$ $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{abc^3}$ $15\sqrt[4]{abc^3}$ $\sqrt[4]{abc^3}$

7º). $x\sqrt{5a}$ $-5\sqrt{5a}$ $-\frac{3}{2}x\sqrt{5a}$ $\frac{1}{3}\sqrt{5a}$

8º). $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{72}$

9º). $\sqrt{75}$ $\quad -\sqrt{147}$ $\quad \sqrt{675}$ $\quad -\sqrt{12}$

10º). $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{27}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt{108}$ $\quad -\frac{3}{5}\sqrt{300}$

11º). $5\sqrt{50}$ $\quad \frac{3}{14}\sqrt{98}$ $\quad -\frac{1}{3}\sqrt{162}$

12º). $2\sqrt{45}$ $\quad -\frac{3}{4}\sqrt{125}$ $\quad -\frac{1}{2}\sqrt{180}$

13º). $4\sqrt{\frac{3}{8}}$ $\quad \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{128}}$ $\quad -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{27}{50}}$ $\quad -0{,}9\sqrt{\frac{75}{18}}$

14º). $8\sqrt{\frac{1}{180}}$ $\quad 0{,}01\sqrt{\frac{4}{245}}$ $\quad 0{,}6\sqrt{\frac{9}{125}}$

15º). $\sqrt[3]{875}$ $\quad \sqrt[3]{448}$ $\quad \sqrt[3]{189}$

16º). $2\sqrt[5]{\frac{1}{64}a}$ $\quad -\sqrt[5]{\frac{243}{2}a}$ $\quad -\sqrt[5]{\frac{a}{486}}$ $\quad \sqrt[5]{\frac{a}{200\,000}}$

17º). $\sqrt[12]{40}$ $\quad \sqrt[12]{135}$ $\quad \sqrt[12]{625}$ $\quad \sqrt[12]{1\,715}$

18º). $x\sqrt[7]{256\,x}$ $\quad \sqrt[7]{2\,x^8}$ $\quad x\sqrt[7]{2\,x}$

19º). $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{128}$ $\quad 0{,}01\sqrt[3]{2\,000}$

20º). $\sqrt[3]{3\,x^3}$ $\quad -\frac{2}{3}x\sqrt[3]{81}$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt[6]{9\,x^6}$ $\quad -x^2\sqrt[3]{\frac{375}{x^3}}$

21º). $\frac{1}{2}x\sqrt[5]{64\,x}$ $\quad \frac{1}{3}\sqrt[5]{486\,x^6}$

22º). $\frac{1}{9}\sqrt{18\,a^6}$ $\quad \frac{1}{10}a^2\sqrt{200\,a^2}$ $\quad -\frac{5}{24}\sqrt{288\,a^4}$

$-\frac{1}{7}a\sqrt{98\,a^2}$

23º). $2\,x\sqrt{\frac{9}{32}}$ $\quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x^2}$ $\quad \frac{5}{7}x^2\sqrt{\frac{49}{50\,x^2}}$

24º). $-\frac{6}{5}\sqrt[3]{2}$ $\quad -2\sqrt[3]{16}$ $\quad -\frac{1}{10}\sqrt[3]{54}$

Efectuar la resta entre los dos radicales de cada uno de los siguientes ejercicios, en el orden en que figuran:

1º). $3\sqrt{3}$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{3}$

2º). $\frac{1}{2}\sqrt[4]{5}$ $\quad -\frac{1}{4}\sqrt[4]{5}$

3º). $-2\sqrt{3x}$ $\quad -\sqrt{3x}$

4º). $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{5x^2}$ $\quad 2\sqrt[3]{5x^2}$

5º). $\frac{3}{5}\sqrt[9]{3a}$ $\quad -9\sqrt[9]{3a}$

6º). $a\sqrt[5]{m+n}$ $\quad -\frac{1}{3}a\sqrt[5]{m+n}$

7º). $x\sqrt{7a}$ $\quad -\frac{3}{2}x\sqrt{7a}$

8º). $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ $\quad -\frac{4}{5}\sqrt[3]{y}$

9º). $a\sqrt[4]{2m+5}$ $\quad -b\sqrt[4]{2m+5}$

10º). $2a\sqrt[7]{x}$ $\quad -\frac{3}{5}a\sqrt[7]{x}$

11º). $\sqrt{50}$ $\quad \sqrt{242}$

12º). $-\sqrt[3]{81}$ $\quad \sqrt[3]{192}$

13º). $-\frac{1}{5}\sqrt{0{,}3}$ $\quad -\sqrt{2{,}7}$

14º). $a\sqrt{2}$ $\quad 2a\sqrt{8}$

15º). $\frac{1}{14}\sqrt{98}$ $\quad -\frac{3}{4}\sqrt{128}$

16º). $\frac{1}{5}\sqrt{675}$ $\quad -\sqrt{12}$

17º). $-\frac{2}{5}\sqrt{125}$ $\quad -\frac{1}{2}\sqrt{180}$

18º). $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}$ $\quad 0{,}2\sqrt[3]{81}$

19º). $-3\sqrt[3]{2}$ $\quad -0{,}1\sqrt[6]{4}$

20º). $-2\sqrt{0{,}45}$ $\quad -3\sqrt{0{,}80}$

21º). $-\sqrt{\frac{1}{12}}$ $\quad -\sqrt{\frac{1}{27}}$

22º). $\frac{1}{4}\sqrt[5]{64x}$ $\quad -\frac{2}{3}\sqrt[5]{486x}$

23º). $-\frac{4}{5}x\sqrt{\frac{75}{32}x^3}$ $\quad -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{200}x^7}$

24º). $\frac{4}{2}\sqrt[4]{\frac{24}{125}}$ $\quad -\frac{10}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{1\,000}}$

25º). $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{32}{3}}$ $\quad 0{,}6\sqrt[4]{\frac{1\,250}{243}}$

26º). $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2}$ $\quad -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9}x}$

Efectuar las siguientes operaciones:

1º). $\sqrt{2}+\frac{1}{5}\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\frac{11}{5}\sqrt{2}$

2º). $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3a}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{3a}+5\sqrt[3]{3a}-\sqrt[3]{3a}$

3º). $5a\sqrt[n]{2x}-\frac{2}{3}\sqrt[n]{2x}-0{,}5a\sqrt[n]{2x}-\sqrt[n]{2x}$

4º). $-\frac{3}{2}\sqrt[4]{m}-\frac{11}{5}\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{m}$

5º). $\frac{1}{5}\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}-0{,}5\sqrt[3]{x}-\frac{7}{2}\sqrt[3]{x}$

6º). $-2\sqrt{a+x}-\frac{2}{3}\sqrt{a+x}+0{,}25\sqrt{a+x}$

7º). $\frac{1}{3}\sqrt[5]{m^2x}-2\sqrt[5]{m^2x}-\frac{6}{5}\sqrt[5]{m^2x}-\sqrt[5]{m^2x}$

8º). $\sqrt[4]{abc}-4\sqrt[4]{abc}+\frac{15}{2}\sqrt[4]{abc}-\frac{7}{9}\sqrt[4]{abc}$

9º). $\sqrt[n+1]{x+y^2}-2\sqrt[n+1]{x+y^2}-\frac{3}{5}\sqrt[n+1]{x+y^2}$

10º). $\sqrt{15n}-\sqrt{60n}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}n}$

11º). $\sqrt[3]{8xy}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{xy}-0{,}9\sqrt[3]{\frac{1}{27}xy}-\sqrt[3]{xy}$

12º). $a\sqrt{x}-2a\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{a^2x}-a\sqrt{x}$

13º). $\sqrt[7]{m^7n^5}-\frac{1}{2}m\sqrt[7]{n^5}+m\sqrt[7]{n^5}$

14º). $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$

15º). $3\sqrt{50}-\frac{1}{5}\sqrt{162}+\frac{3}{2}\sqrt{98}$

16º). $-3\sqrt{180} - \frac{3}{4}\sqrt{125} - 2\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{45}$

17º). $\frac{1}{2}\sqrt{12} - \frac{4}{3}\sqrt{27} - 0{,}1\sqrt{75}$

18º). $\frac{3}{2}\sqrt{2{,}8} - \frac{1}{6}\sqrt{25{,}2} + \frac{3}{14}\sqrt{34{,}5}$

19º). $-0{,}75\sqrt[3]{16} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{54} + \frac{5}{4}\sqrt[3]{128} - 0{,}01\sqrt[3]{250}$

20º). $-2\,m\sqrt{\frac{9}{32}} - \frac{3}{4}m\sqrt{\frac{1}{8}}$

21º). $2\sqrt{\frac{1}{8}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{2}} - \frac{1}{9}\sqrt{40 + \frac{1}{2}}$

22º). $-4\,xy\sqrt[4]{5\,x^2\,(x+y)} + \sqrt[4]{5\,x^2\,(x+y)^9}$

Respuesta: $(x-y)^2\sqrt[4]{5\,x^2\,(x+y)}$

23º). $\sqrt[3]{a^7x - a^6z} - \sqrt[3]{8\,a^4x - 8\,a^3z} + \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^4x - a^3z}$

Respuesta: $(a-1)^2\sqrt[3]{a\,x - z}$

Multiplicar los radicales que figuran en cada uno de los siguientes ejercicios:

1º). $\frac{1}{2}\sqrt{3\,x}\quad 2\sqrt{\frac{1}{3}x}\quad 3\sqrt{2\,x}\quad (-2\sqrt{5})$

2º). $\left(-\frac{1}{3}x^2\sqrt{5\,mn^2}\right)\quad 9\,x\sqrt{2\,m^3\,n^2}\quad (-\sqrt{0{,}1\,m^2\,n^3})$

3º). $5\,a\sqrt[7]{2\,mx^3}\qquad (-3\,a^2\sqrt[7]{16\,n^4\,x^6})\qquad \sqrt[7]{m^5\,x}$

4º). $\frac{2}{3}n\sqrt[3]{x^4\,y^3}\qquad \frac{1}{4}\sqrt[3]{-2\,xy^4}\qquad \sqrt[3]{4\,x^7\,y^6}$

5º). $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2\,y^3\,z}\qquad \sqrt[4]{3\,x^5\,y^2\,z^3}\qquad \sqrt{4\,xy^6\,z}\qquad (-\sqrt{2\,z})$

6º). $\frac{1}{3}\sqrt[15]{xy^2}\qquad (-6\sqrt[12]{x^2\,y^3})\qquad \frac{1}{6}\sqrt[6]{xy^2}\qquad (-\sqrt[3]{xy^3})\qquad 5\sqrt{xy}$

7º). $\left(-0,1\sqrt{\frac{1}{3}a^3b^{12}}\right)$ $\sqrt[3]{3a^4b^5c^{10}}$ $\sqrt{\frac{2}{3}a^7b^{14}c^{12}}$

8º). $\frac{1}{2}\sqrt[9]{\frac{4}{3}a^5b^6z^3}$ $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}ab^4c}\right)$ $3\sqrt[6]{\frac{8}{9}a^5z^4c^3}$

9º). $\frac{9}{4}\sqrt[10]{x^9y^3z^7b^5}$ $\frac{2}{3}\sqrt[4]{a^2x^2y^2z}$ $(-6\sqrt[5]{a^4x^4z^3b^2})$

10º). $2\sqrt{m^3n^2p^4}$ $\left(-\frac{1}{5}\sqrt[5]{m^{-2}n^4p^7}\right)$

$(-10\sqrt[4]{mn^5p^2})$ $\frac{3}{8}\sqrt[8]{m^{-2}n^{-1}}$

11º). $a\sqrt{mx}\left(-\frac{1}{5}\sqrt[4]{m^3xy^{-1}}\right)\left(-\frac{5}{a^2}\sqrt[8]{5my}\right)\left(-3\sqrt[6]{\frac{1}{2}x^{-5}y^{-3}}\right)$

12º). $\left(-\frac{1}{3}\sqrt[4]{abc}\right)\left(-2\sqrt[3]{bc^{-1}}\right)\frac{3}{2}\sqrt{a^{-3}c^5}$

13º). $\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$ $5\sqrt[3]{2x^{-1}y^4}$ $0,1\sqrt[6]{\frac{2}{3}x^4y^{-4}}$

14º). $3\sqrt[5]{4m^3p^4}$ $\frac{4}{5}\sqrt[6]{\frac{1}{2}m^{-4}p^2x^3}$ $12\sqrt[3]{\frac{1}{2}m^3p^{-1}x}$

$\frac{1}{6}\sqrt[10]{2mp^5x^{-2}}$

15º). $\sqrt[6]{2a^{-5}n}$ $\sqrt[3]{-2^{-2}a^{-1}n^{-2}}$ $\sqrt{2^{-1}an^{-1}}$ $\sqrt[9]{2^5a^{-7}n^{-3}}$

16º). $\frac{7}{25}\sqrt[8]{0,1^{-6}a^{-2}b^2c^{-4}}$ $\frac{5}{14}\sqrt[12]{0,1^5a^7b^{-5}c^{-9}}$

$\left(-10\sqrt[6]{0,1^{-4}a^{-3}bc}\right)$

17º). $\sqrt[5]{(a-x)^3}$ $\sqrt[10]{a+x}$ $\sqrt{a-x}$

Respuesta: $(a-x)\sqrt[10]{a^2-x^2}$

18º $\sqrt{a^4x^2-a^4y^2}$ $\sqrt{\frac{1}{x-y}}$

Respuesta: $a^2\sqrt{x+y}$

19º). $\sqrt[3]{x^2 a^2 - 2x^2 + x^2}$ $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a-1}}$

Respuesta: $x \sqrt[3]{a+1}$

Efectuar la división entre los dos radicales de cada uno de los siguientes ejercicios en el orden en que figuran:

1º). $2\sqrt[5]{xy} \left(-3\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2}}\right)$ 2º). $\sqrt[7]{ab^3c} \left(-\sqrt[7]{a^2b^5}\right)$

3º). $\dfrac{4}{3}\sqrt[10]{2x^5}$ $\dfrac{3}{4}\sqrt[10]{4x^2}$ 4º). $\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x^3}\right)$ $\sqrt{16x^5}$

5º). $\dfrac{3}{5}ab\sqrt{12x^{-4}y^3z} \left(-\sqrt{6x^2y^5}\right)$

6º). $\left(-2\sqrt[3]{5x^{11}y^{10}z^5}\right) \left(-\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{0{,}1x^{-4}y^3z^2}\right)$

7º). $\sqrt{3x^5y^4} \left(-\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}x^2y^3}\right)$

8º). $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}x^3y^2z}$ $2\sqrt[6]{0{,}4x^2y^4z^4}$

9º). $\left(-\sqrt[5]{\dfrac{4x^3y^2}{3mz^5}}\right) 2\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{2mz}}$

10º). $\dfrac{1}{5}\sqrt[9]{x^2a^3y^{-1}} \left(-\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{x^{-1}a^4z^{-3}}\right)$

11º). $\left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}m^2y^{-3}n^4}\right) \left(-\sqrt[5]{0{,}16m^5y^{-2}n^3}\right)$

12º). $\left(-2\sqrt{\dfrac{x+y}{2(m-n)}}\right)$ $(x+y)\sqrt{\dfrac{2(m-n)}{x+y}}$

13º). $\sqrt{a^2m - b^2m}$ $\sqrt{\dfrac{a+b}{m}}$.

Calcular:

1º). $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2a}}$ 2º). $\sqrt{\sqrt{13-2}} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{13}$

3º). $\sqrt{3+3\sqrt{10}} \cdot \sqrt{-3+3\sqrt{10}}$

4º). $\sqrt{10-3\sqrt[4]{0{,}01}} \cdot \sqrt{10+3\sqrt[4]{0{,}01}}$

5º). $12 : 2\sqrt{3}$ 6º). $6 : 5\sqrt[3]{2}$ 7º). $2\,a\,x : \sqrt{5\,a}$

8º). $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ 9º). $\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2$

10º). $\left(2\sqrt{a}+\sqrt{ab}\right)^2$ 11º). $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$

12º). $\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2$ 13º). $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

14º). $\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2$ 15º). $\left(-\dfrac{1}{4}\sqrt{2}+\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2$

16º). $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{3}-\dfrac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2$ 17º). $\left(-2\sqrt{\dfrac{1}{6}}+9\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2$

18º). $\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{6}}-3\sqrt{3}\right)^2$ 19º). $\left(3\,x\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{4}\,x\sqrt{8}\right)^2$

20º). $\left(-2\,m\sqrt{3}-\dfrac{1}{5}\,m\sqrt{25}\right)^2$ 21º). $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^3$

22º). $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^3$ 23º). $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^3$

24º). $\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)^3$ 25º). $\left(-2\,x\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}+3\,x\sqrt[3]{\dfrac{1}{6}}\right)^3$

26º). $\left(-a\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}-2\,a\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}}\right)^3$

27º). $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

28º). $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

29º). $\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{xy}\right)\left(3\sqrt{xy}-2\sqrt{x}\right)$

30º). $\left(5\sqrt{3}-2\sqrt{13}\right)\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{13}\right)$

31º). $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

32º). $\left(25\sqrt{\frac{1}{5}}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(4\sqrt{\frac{1}{2}}+25\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$

33º). $\left(\frac{1}{3}\sqrt{9\,m^3}-6\sqrt{\frac{1}{3}m}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt{9\,m^3}+6\sqrt{\frac{1}{3}m}\right)$

34º). $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{6}\sqrt{12}-\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{5}{12}\sqrt{48}\right)\sqrt{3}$

Respuesta: 1

35º). $\left(\frac{1}{2}\sqrt{50}-3\sqrt[4]{64}+2\sqrt[6]{5\,832}-\frac{2}{3}\sqrt{288}\right):\sqrt{2}$

Respuesta: $-\frac{11}{2}$

36º). $\left(5\sqrt[3]{2\,ab}-2\sqrt[6]{4\,a^2b^2}+\sqrt[9]{8\,a^3\,b^3}\right)\sqrt[3]{2\,a^2\,b^2}$

Respuesta: $4\,ab\sqrt[3]{4}$

37º). $\left(\sqrt{1-a}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)$

Respuesta: $\sqrt{1-a}$

38º). $\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{9}{8}}-3\sqrt{2}-\sqrt{0{,}32}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{8}\right)$

Respuesta: $-1{,}2$

39º). $\dfrac{\left(5\sqrt[4]{x^2+4x+4}-\frac{1}{2}\sqrt{x+2}+\frac{1}{5}\sqrt{25x+50}-\frac{3}{4}\sqrt{4x+8}\right)}{\sqrt{x+2}}$

Respuesta: 4

40º). $\dfrac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a-b}-\sqrt{a^2 b-ab^2}-\sqrt{7(a-b)}+\sqrt{28a-28b}}{\sqrt{a-b}}$

Respuesta: $\sqrt{7}$

41º). $\left(a-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(a-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

Respuesta: $a^2-a-\dfrac{1}{2}$

Racionalizar cada uno de los denominadores de las siguientes fracciones:

1º) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 2º). $\dfrac{-3}{\sqrt[3]{-2}}$ 3º). $\dfrac{5}{-2\sqrt{3}}$ 4º). $\dfrac{2}{\sqrt[4]{4}}$

5º). $\dfrac{6}{5\sqrt{3}}$ 6º). $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ 7º). $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ 8º). $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3a}}$

9º). $\dfrac{2}{\sqrt[4]{xy}}$ 10º). $\dfrac{x^2}{\sqrt{2mx}}$ 11º). $\dfrac{3m}{\sqrt[4]{ab}}$ 12º). $\dfrac{5x^2}{\sqrt[8]{x^2}}$

13º). $\dfrac{a}{\sqrt[5]{-2n}}$ 14º). $\dfrac{x}{\sqrt[3]{xy^2}}$ 15º). $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3x}}$ 16º). $\dfrac{2n}{\sqrt{2ab}}$

17º). $\dfrac{ax}{\sqrt[5]{-a^3 b^2}}$ 18º). $\dfrac{0{,}3\,a^2}{\sqrt{3a}}$ 19º). $\dfrac{3a}{\sqrt{a}}$ 20º). $\dfrac{8x\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

21º). $\dfrac{2x^2}{\sqrt{3x}}$ 22º). $\dfrac{3n}{\sqrt[7]{a^4 b^5 c^2}}$ 23º). $\dfrac{n^2 y^3}{\sqrt[4]{8a^3 x^2}}$ 24º). $\dfrac{6ab}{\sqrt[3]{4a^2 b}}$

25º). $\dfrac{x}{\frac{1}{2}\sqrt[5]{x^3}}$ 26º). $\dfrac{8x^3 y^4}{\sqrt[5]{2x^3 y^2}}$ 27º). $\dfrac{10ax}{\sqrt[3]{-5a^2 x^2}}$ 28º). $\dfrac{3m}{2\sqrt[3]{9mn^2}}$

29º). $\dfrac{12x^3 y^3}{a^3\sqrt{6bx}}$ 30º). $\dfrac{15ab^3 c^2}{2n^3\sqrt[3]{5a^2 b^2 c}}$ 31º). $\dfrac{0{,}9\,m^5}{ax\sqrt[5]{-3m^4 x}}$

32º). $\dfrac{ab}{\sqrt{x^4 y^3 b}}$ 33º). $\dfrac{2x^2}{4\sqrt[7]{x^3}}$ 34º). $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{2\sqrt[5]{x^2}}$ 35º). $\dfrac{-3}{\sqrt{a^5 b^6 c^2}}$

36º). $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{x^4 y^5}}$ 37º). $\dfrac{3x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^8}}$ 38º). $\dfrac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[7]{a^{11}}}$ 39º). $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^7}}$

40º). $\dfrac{\frac{3}{4}\sqrt{x^5}}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{10}}}$ 41º). $\dfrac{-2\sqrt[3]{x^4}}{-\frac{4}{3}\sqrt{x^9}}$ 42º). $\dfrac{\sqrt[3]{z^5}}{0,1\sqrt[5]{z^{10}}}$ 43º). $\dfrac{0,01}{\frac{2}{5}\sqrt{m^7}}$

44º). $\dfrac{-\sqrt{a^3}}{\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^4}}$ 45º). $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ 46º). $\dfrac{3}{5+\sqrt{2}}$ 47º). $\dfrac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{7}+3}$

48º). $\dfrac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$ 49º). $\dfrac{-4}{4-\sqrt{5}}$ 50º). $\dfrac{-1}{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$ 51º). $\dfrac{2}{1-\sqrt{7}}$

52º). $\dfrac{3}{9+\sqrt{6}}$ 53º). $\dfrac{10}{0,2-\sqrt{2}}$ 54º). $\dfrac{-1}{1+\sqrt{0,1}}$ 55º). $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{\frac{1}{3}}}$

56º). $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ 57º). $\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}$ 58º). $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$ 59º). $\dfrac{-0,3}{\sqrt{0,1}+0,2}$

60º). $\dfrac{6}{\sqrt{\frac{2}{3}}-4}$ 61º). $\dfrac{-1}{\sqrt{5}-\frac{1}{5}}$ 62º). $\dfrac{0,4}{3\sqrt{2}+2}$ 63º). $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$

64º). $\dfrac{\sqrt{3}-4}{4+\sqrt{3}}$ 65º). $\dfrac{\sqrt{7}-5}{5+\sqrt{7}}$ 66º). $\dfrac{10+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-10}$ 67º). $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{6}+3}{2\sqrt{\frac{1}{8}}-5}$

68º). $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 69º). $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}$ 70º). $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-\sqrt{2}}$ 71º). $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}$

72º). $\dfrac{9+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-10}$ 73º). $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$ 74º). $\dfrac{5-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-5}$

75º). $\dfrac{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}-\frac{1}{4}}}$ 76º). $\dfrac{9\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ 77º). $\dfrac{2+\frac{1}{2}\sqrt{12}}{\sqrt{5}-11}$ 78º). $\dfrac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}$

79º). $\dfrac{3}{2+\sqrt{a}}$ 80º). $\dfrac{5}{3-\sqrt{x}}$ 81º). $\dfrac{2+a}{a+\sqrt{b}}$ 82º). $\dfrac{x}{n-\sqrt{ab}}$

83º). $\dfrac{6\,m}{4\,m-\sqrt{2\,m}}$ 84º). $\dfrac{xy}{x^2+\sqrt{2\,x}}$ 85º). $\dfrac{3\,a}{6-\sqrt{3\,a}}$

86º). $\dfrac{2\,x}{4\,xy+\sqrt{6\,x}}$ 87º). $\dfrac{ax^4}{2\,x^3-x\sqrt{x}}$ 88º). $\dfrac{6}{\sqrt{a}-1}$

89º). $\dfrac{1}{\sqrt{2\,x}+y}$ 90º). $\dfrac{ax}{\sqrt{mn}+x}$ 91º). $\dfrac{4\,n}{\sqrt{2}-b}$ 92º). $\dfrac{5\,x^2}{\sqrt{5\,x}-10\,x}$

93º). $\dfrac{0{,}4\,a}{\sqrt{0{,}2\,ab}+0{,}6\,a}$ 94º). $\dfrac{a^3\,b^2\,c}{\sqrt{ab}-abc}$ 95º). $\dfrac{2\,a^2\,b}{ab\sqrt{a}+2\,ab}$

96º). $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-b}$ 97º). $\dfrac{2-x}{x-\sqrt{y}}$ 98º). $\dfrac{m^2}{3-m\sqrt{n}}$ 99º). $\dfrac{a+x}{\sqrt{a}+x}$

100º). $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}+4}}$ 101º). $\dfrac{3+\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{\frac{1}{5}}}}$ 102º). $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

103º). $\dfrac{a+\sqrt{a-b}}{a-\sqrt{a-b}}$ 104º). $\dfrac{2\,b}{(a+b)-\sqrt{a^2-b^2}}$

Respuesta: $1+\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

105º). $\dfrac{\frac{2\,y}{x}}{\left(\frac{1}{x}-y\right)+\sqrt{\frac{1}{x^2}+y^2}}$ 106º). $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}$

Respuesta: $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+x^2}-\dfrac{1}{x}+y$

Respuesta: $\sqrt{5}+2$

107º). $\sqrt{2m\sqrt{n}} \cdot \dfrac{\sqrt{m+\sqrt{n}-\sqrt{m^2+n}}}{\sqrt{m+\sqrt{n}+\sqrt{m^2+n}}}$

Respuesta: $m+\sqrt{n}-\sqrt{m^2+n}$

108º). $\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}-x+y}$

Respuesta: $\sqrt{x^2+y^2}+(x-y)$

109º). $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

110º). $\dfrac{3}{\sqrt{9}-\sqrt{7}}$ 111º). $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ 112º). $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

113º). $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$ 114º). $\dfrac{2}{\sqrt{7x}+\sqrt{5x}}$ 115º). $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

116º). $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$ 117º). $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ 118º). $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

119º). $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{8}}$ 120º). $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}$ 121º). $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{6}}}$

122º). $\dfrac{\frac{1}{5}\sqrt{5}+2\sqrt{8}}{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 123º). $\dfrac{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}}$ 124º). $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$

125º). $\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{7}}}$ 126º). $\dfrac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{6}}}$ 127º). $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$

128º). $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$ 129º). $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$

130º). $\dfrac{2n}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$

Respuesta: $\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}$

131º). $\dfrac{4mn}{\sqrt{\frac{1}{m}-n}+\sqrt{\frac{1}{m}+n}}$

Respuesta: $2\sqrt{m}\,(\sqrt{1-mn}-\sqrt{1+mn})$

132º). $\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}$

Respuesta: $\dfrac{(a-\sqrt{a^2-b})\sqrt{b}}{b}$

133º). $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}}$

Respuesta: $\dfrac{(x+\sqrt{x^2-y})\sqrt{y}}{y}$

CAPÍTULO II.

POTENCIAS CON EXPONENTE FRACCIONARIO.

1. Potencias con exponente fraccionario y positivo. — Hasta ahora hemos considerado potencias en que los exponentes son números enteros, pero se presentan también potencias con exponente fraccionario.

Trataremos primero las que tienen exponente fraccionario positivo, por ejemplo:

$$a^{\frac{2}{3}}$$

De acuerdo con el principio de permanencia de las leyes formales de la Aritmética, la interpretación que se dé a estas expresiones, y a las operaciones con ellas, deben ser tales que subsistan las propiedades de dichas operaciones cuando los exponentes son números enteros.

De tal modo, si subsiste la propiedad que dice que una expresión no altera si se la eleva a la potencia enésima y al mismo tiempo se le extrae la raíz enésima, la expresión anterior no debe alterar si se la eleva al cubo y al mismo tiempo se le extrae la raíz cúbica; es decir:

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3} \qquad [1]$$

En la potenciación con exponente entero hemos visto que, la potencia de una potencia, es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes; si esta propiedad subsiste al ampliar la potenciación considerando exponentes racionales, podremos escribir:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3} \times 3} = a^2$$

Luego, reemplazando en [1]

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

Resultaría así la potencia $a^{\frac{2}{3}}$ expresada como un radical cuyo índice es el denominador 3, y cuyo radicando es la base a, elevada al numerador 2.

Esta interpretación se acepta para cualquier potencia de exponente fraccionario positivo y se establece así en la siguiente:

DEFINICIÓN. *Toda potencia de exponente fraccionario y positivo es igual al radical cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es la base de la potencia, elevada a un exponente igual al numerador del exponente dado.*

En símbolos:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

EJEMPLOS:

$$a^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{a^9} \quad ; \quad x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3} \quad ; \quad a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

$$27^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{27^5} = (\sqrt[3]{27})^5 = 3^5 = 243$$

2. Potencias de exponente fraccionario y negativo. — Recordando la definición de potencia de exponente entero negativo, la expresión a^{-2} es:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Si el exponente negativo es fraccionario, por ejemplo, $a^{-\frac{4}{5}}$, y se admite la misma interpretación anterior, resulta:

$$a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{5}}}$$

En general:

$$a^{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{a^{\frac{x}{y}}} \qquad [1]$$

Pero obsérvese que de acuerdo con la definición de potencia de exponente fraccionario positivo, es:

$$\frac{1}{a^{\frac{x}{y}}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}} \qquad [2]$$

De [1] y [2]:

$$a^{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}$$

es decir:

Toda potencia de exponente fraccionario y negativo es igual a la recíproca del radical cuyo índice es el denominador del exponente

fraccionario y cuyo radicando es la base de la potencia elevada a un exponente igual al numerador del exponente dado.

EJEMPLOS:

$$a^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} \quad ; \quad a^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{a}}$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Cuando la base es decimal, es cómodo darle al número forma fraccionaria:

$$\left(0{,}01\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} = 100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = (\sqrt{100})^3 =$$

$$= 10^3 = 1\,000$$

3. Propiedades de las potencias con exponente fraccionario. — Como es de prever, de acuerdo con las consideraciones hechas, las potencias con exponente fraccionario gozan de las mismas propiedades que las potencias con exponente entero.

Así:

1º PROPIEDAD UNIFORME. *Si se elevan a una misma potencia fraccionaria ambos miembros de una igualdad, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos:

$$\text{Si} \quad a = b \quad \text{es} \quad a^{\frac{x}{y}} = b^{\frac{x}{y}}$$

2º PROPIEDAD DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN. *La potencia de exponente fraccionario de un producto es igual al producto de las potencias de ese mismo exponente, de cada uno de los factores.*

En símbolos:

$$\left(a\,b\,c\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}}\,b^{\frac{x}{y}}\,c^{\frac{x}{y}}$$

En efecto, según la definición de potencia de exponente fraccionario

$$\left(a\,b\,c\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{(a\,b\,c)^x}$$

pero:

$$\left(a\,b\,c\right)^{x} = a^x\,b^x\,c^x$$

Reemplazando en el radicando, se tiene:

$$\left(a\,b\,c\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x\,b^x\,c^x} \qquad [1]$$

y aplicando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación, es:

$$\sqrt[y]{a^x\,b^x\,c^x} = \sqrt[y]{a^x}\cdot\sqrt[y]{b^x}\cdot\sqrt[y]{c^x}$$

Reemplazando en [1]:

$$\left(a\,b\,c\right)^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}\cdot\sqrt[y]{b^x}\cdot\sqrt[y]{c^x} \qquad [2]$$

pero, por definición:

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt[y]{b^x} = b^{\frac{x}{y}}$$

$$\sqrt[y]{c^x} = c^{\frac{x}{y}} .$$

Luego, reemplazando en [2], resulta:

$$\left(a\,b\,c\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}}\ b^{\frac{x}{y}}\ c^{\frac{x}{y}}$$

que es lo que queríamos probar.

EJEMPLO:

$$\left(\frac{1}{8} \times 125\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \times 125^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} \quad \sqrt[3]{125^2} =$$

$$= \left[\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right]^2 \quad \left[\sqrt[3]{125}\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 5^2 = \frac{1}{4} \times 25$$

Luego:

$$\left(\frac{1}{8} \times 125\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{25}{4}$$

3º PROPIEDAD DISTRIBUTIVA CON RESPECTO A LA DIVISIÓN. *La potencia de exponente fraccionario de un cociente es igual al cociente que se obtiene al dividir el dividendo elevado a ese exponente por el divisor elevado a ese mismo exponente.*

En símbolos:

$$\left(a : b\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}} : b^{\frac{x}{y}}$$

Comprobación numérica:

$$\left(64 : 4\right)^{-\frac{1}{2}} = 64^{-\frac{1}{2}} : 4^{-\frac{1}{2}} \qquad [1]$$

En efecto:

$$\left(64 : 4\right)^{-\frac{1}{2}} = 16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

y por otra parte:

$$64^{-\frac{1}{2}} : 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{64}} : \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Luego la igualdad [1] es cierta, pues los dos miembros dan el mismo resultado.

4º PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. *El producto de potencias de igual base y exponente fraccionario, es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes.*

En símbolos:

$$a^{\frac{m}{n}}\, a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{x}{y}}$$

En efecto, de acuerdo con la definición:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

y

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

Multip. m. a. m.:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[y]{a^x}$$

Reduciendo los dos radicales del segundo miembro a mínimo común índice, ny, se tiene:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[ny]{a^{my}} \cdot \sqrt[ny]{a^{xn}}$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[ny]{a^{my}\, a^{xn}} = \sqrt[ny]{a^{my+xn}} \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta la definición de potencia de exponente fraccionario, es:

$$\sqrt[ny]{a^{my+xn}} = a^{\frac{my+xn}{ny}} = a^{\frac{my}{ny}+\frac{xn}{ny}}$$

y simplificando en las fracciones exponentes, resulta:

$$\sqrt[my]{a^{my+xn}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{x}{y}} \qquad [2]$$

Aplicando el carácter transitivo a las relaciones [1] y [2], resulta:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{x}{y}}$$

que es lo que queríamos probar.

EJEMPLO:

$$(-3)^{\frac{2}{5}}(-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{2}{5}+\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{4+15}{10}} = (-3)^{\frac{19}{10}}$$

5º COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. *El cociente de potencias de igual base y exponente fraccionario, es igual a otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.*

En símbolos:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{x}{y}}$$

EJEMPLO:

$$2^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{5}{4}}$$

6º POTENCIA DE UNA POTENCIA. *Toda potencia de una potencia de exponente fraccionario, es otra potencia de igual base, cuyo exponente es el producto de los exponentes dados.*

En símbolos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{m}{n}\frac{x}{y}}$$

EJEMPLO:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}\right]^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{10}}$$

4. Gráfico de la función exponencial. — Se llama función exponencial a la función de la forma

$$y = a^x$$

donde a es una constante positiva distinta de 1 y x la variable independiente.

Las características de la función dependen de que la base a sea mayor o menor que 1. Estudiaremos cada uno de estos casos por separado.

PRIMER CASO: $a > 1$. Para fijar ideas damos a a un valor determinado.

Sea por ejemplo $a = 2$; la función considerada es entonces:

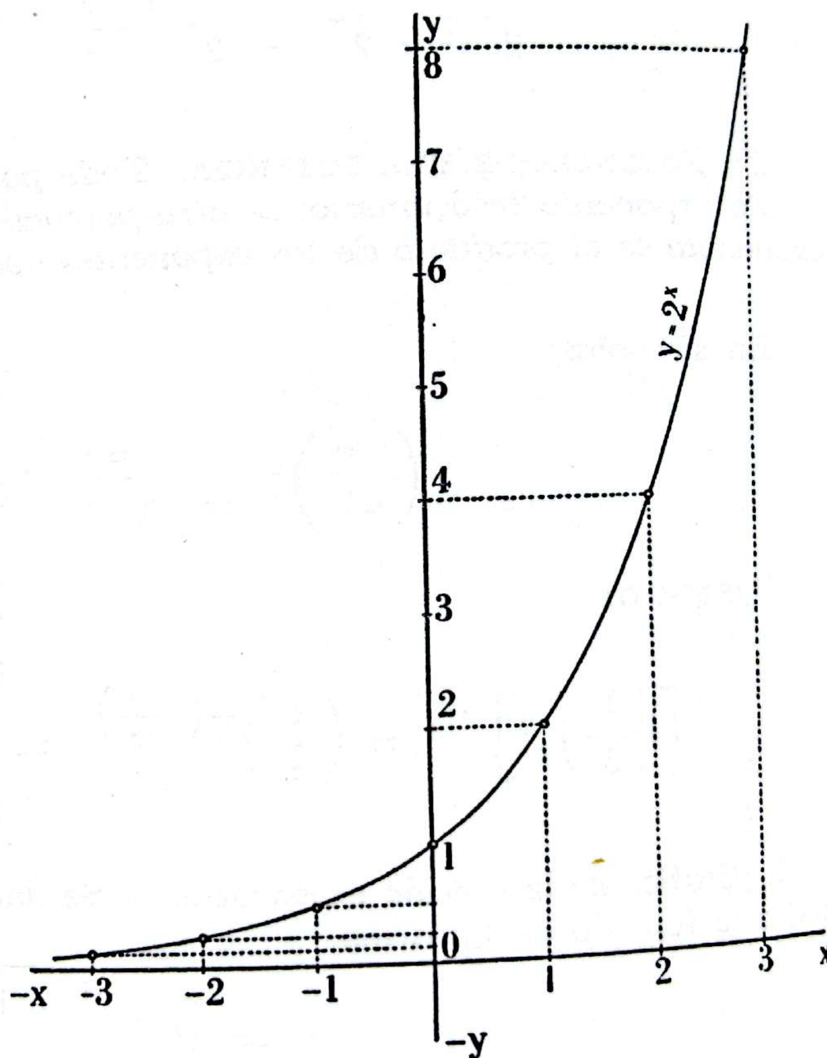
$$y = 2^x .$$

Asignemos valores a x, y calculemos los correspondientes de y; obtenemos así el cuadro de valores que figura a continuación, de acuerdo con el cual se construye la gráfica.

CUADRO DE VALORES

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
$\frac{1}{2}$	1,41...
$\frac{3}{2}$	2,82...
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$

GRÁFICA



Se observa, en este caso, que la curva representativa de la función exponencial crece rápidamente para los valores positivos de x, y decrece para los valores negativos, tendiendo a hacerse tangente al semieje negativo de las abscisas.

La curva conserva la misma forma y características en todos los casos en que la base a es mayor que 1.

Segundo caso. $a < 1$. En este caso, para fijar ideas damos a a un valor particular. Sea por ejemplo $a = \frac{1}{3}$. La función considerada es:

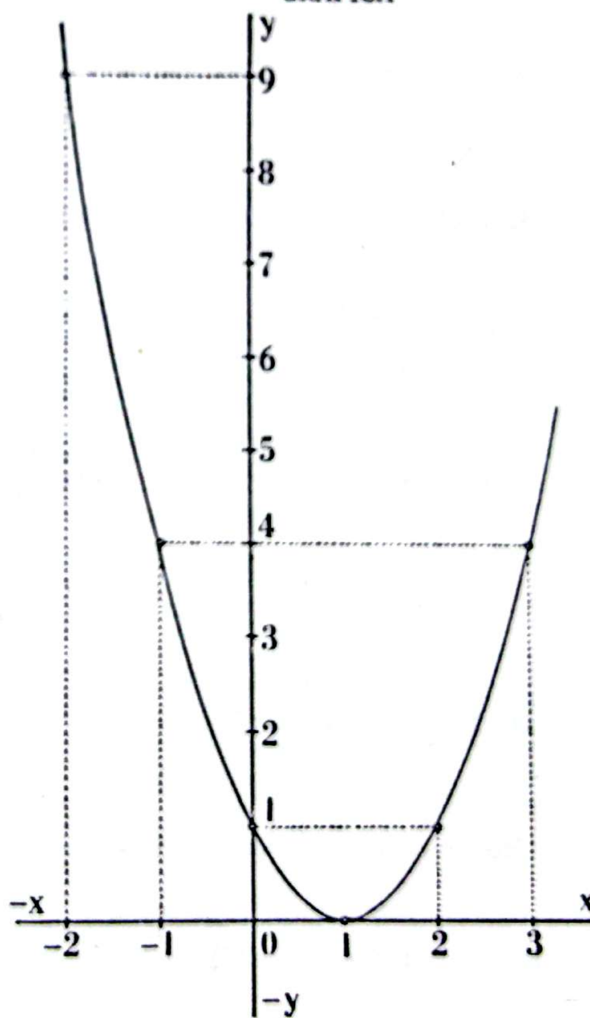
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

La tabla de valores y el gráfico correspondiente figuran a continuación

CUADRO DE VALORES

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
0	1
$\frac{1}{2}$	0,57...
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
$-\frac{1}{2}$	1,73...
-1	3
-2	9

GRÁFICA



Se observa en este caso que la curva representativa de la función exponencial decrece hacia los valores positivos de x, tendiendo a hacerse tangente al semieje positivo de las abscisas.

La curva conserva la misma forma y características en todos los casos en que la base a es menor que 1.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Escribir en forma de radical las siguientes potencias:

1º). $a^{\frac{1}{2}}$ 2º). $m^{\frac{3}{4}}$ 3º). $x^{\frac{5}{3}}$

4º). $y^{\frac{9}{4}}$ 5º). $n^{-\frac{4}{5}}$ 6º). $p^{-\frac{7}{3}}$

7º). $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$ 8º). $\left(-5\right)^{-\frac{a}{b}}$ 9º). $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}$

Calcular el valor de las siguientes potencias:

1º). $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ 2º). $4^{\frac{3}{2}}$ 3º). $\left(-32\right)^{\frac{2}{5}}$

4º). $81^{\frac{5}{4}}$ 5º). $\left(-27\right)^{-\frac{2}{3}}$ 6º). $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

7º). $0{,}01^{-\frac{5}{2}}$ 8º). $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 9º). $0{,}008^{-\frac{5}{3}}$

10º). $\left(-0{,}125\right)^{-\frac{1}{3}}$ 11º). $1{,}21^{-\frac{1}{2}}$ 12º). $\left(5+\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

Resolver los siguientes ejercicios:

1º). $a^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{3}{4}}\,a^{\frac{2}{3}}$ 2º). $b^{-\frac{2}{3}}\,b^{-1}\,b\;b^{-\frac{5}{6}}$ 3º). $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-2}\cdot 3^{\frac{2}{5}}\cdot 3$

4º). $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4}{9}\right)^{-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{4}}$

5º). $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{5}{7}\right)^{-1} \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

6º). $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

7º). $\left(0{,}008\right)^{\frac{5}{4}} \left(0{,}008\right)^{-\frac{1}{3}} \left(0{,}008\right)^{\frac{1}{8}} \left(0{,}008\right)^{-\frac{3}{8}}$

8º). $y^{\frac{3}{5}} : y^{-\frac{1}{2}}$ 9º). $m^{-\frac{2}{3}} : m^{\frac{1}{4}}$

10º). $\left(\frac{3}{7}\right)^{-\frac{5}{2}} : \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$

11º). $\left(0{,}2\right)^{-\frac{5}{4}} : \left(0{,}2\right)^{\frac{3}{4}}$

12º). $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-\frac{4}{5}} : \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$

13º). $\left(\frac{9}{16}\right)^{-3} : \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

14º). $\left(0{,}0016\right)^{\frac{5}{2}} : \left(0{,}0016\right)^{-\frac{3}{2}}$

15º). $0{,}64 : 0{,}64^{\frac{3}{2}}$

16º). $\left[32^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{5}}$

17º). $\left[\left(\frac{1}{16}\right)^{3}\right]^{-\frac{1}{4}}$

18º). $\left[\left(0{,}25\right)^{-5}\right]^{-\frac{3}{10}}$

19º). $\left[\left(-0{,}008\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{9}}$

20º). $\left\{\left[\left(-243\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{3}\right\}^{-\frac{4}{5}}$

21º). $\left\{\left[\left(0{,}01\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{5}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

22º). $\left[\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{3}}\left[\left(-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{10}}\right]^{-1}$

23º). $\left[\left(0{,}01\right)^{\frac{5}{4}}\right]^{-2}\left[\left(0{,}01\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{3}{4}}$

24º). $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)$

CAPÍTULO III.

LOGARITMOS.

1. Recordemos que la potenciación tiene dos operaciones inversas: una, la radicación, que ya hemos estudiado, y la otra, la *logaritmación*, que estudiaremos en este capítulo.

2. **Logaritmo.** — DEFINICIÓN. Se llama *logaritmo* de un número n en base a otro número b positivo y distinto de 1, al número x que es el exponente a que hay que elevar la base b, para obtener el número n.

El logaritmo del número n, en base b, se expresa mediante la notación

$$\log_b n$$

Simbólicamente:

$$\log_b n = x \qquad [\text{si } n = b^x]$$

(que se lee: logaritmo de n en base b, es igual a x).

EJEMPLOS:

$\log_2 32 = 5$ pues $32 = 2^5$

$\log_3 27 = 3$ pues $27 = 3^3$

$\log_{12} 1 = 0$ pues $1 = 12^0$

$\log_{10} 10\,000 = 4$ pues $10\,000 = 10^4$

$\log_{10} 0{,}01 = -2$ pues $0{,}01 = 10^{-2}$

$\log_{10} 10 = 1$ pues $10 = 10^1$

$\log_7 \frac{1}{49} = -2$ pues $\frac{1}{49} = 7^{-2}$

3. **Observación 1ª** — Los números negativos no tienen logaritmo en el campo de los números reales.

En efecto, es así, pues, como por definición, la base de los logaritmos es positiva, ninguna potencia de esa base puede dar resultado negativo en el campo de los números reales. Así, por ejemplo, no existe el logaritmo de -9 en base 3, pues ninguna potencia de 3 es igual a -9.

Observación 2ª — Cuando la base de los logaritmos es mayor que 1, los números positivos menores que la unidad tienen logaritmo negativo. Así:

$$\log_3 \frac{1}{81} \text{ . es igual a } -4 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$$\log_2 0{,}125 = \log_2 \frac{125}{1\,000} = \log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

4. **Gráfico de la función logarítmica.** — La función logarítmica es de la forma:

$$y = \log_b x$$

Supongamos el caso particular en que la base de los logaritmos es 2, es decir:

$$y = \log_2 x$$

Demos ahora valores a x, y calculemos los correspondientes de y; se obtiene así que:

Si $x = 1$; $y = \log_2 1 = 0$ pues $1 = 2^0$

Si $x = 2$; $y = \log_2 2 = 1$ pues $2 = 2^1$

Si $x = 4$; $y = \log_2 4 = 2$ pues $4 = 2^2$

Si $x = 8$; $y = \log_2 8 = 3$ pues $8 = 2^3$

Si $x = \frac{1}{2}$; $y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ pues $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

$$\text{Si } x = \frac{1}{4};\ y = \log_2 \frac{1}{4} = -2 \quad \text{pues } \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

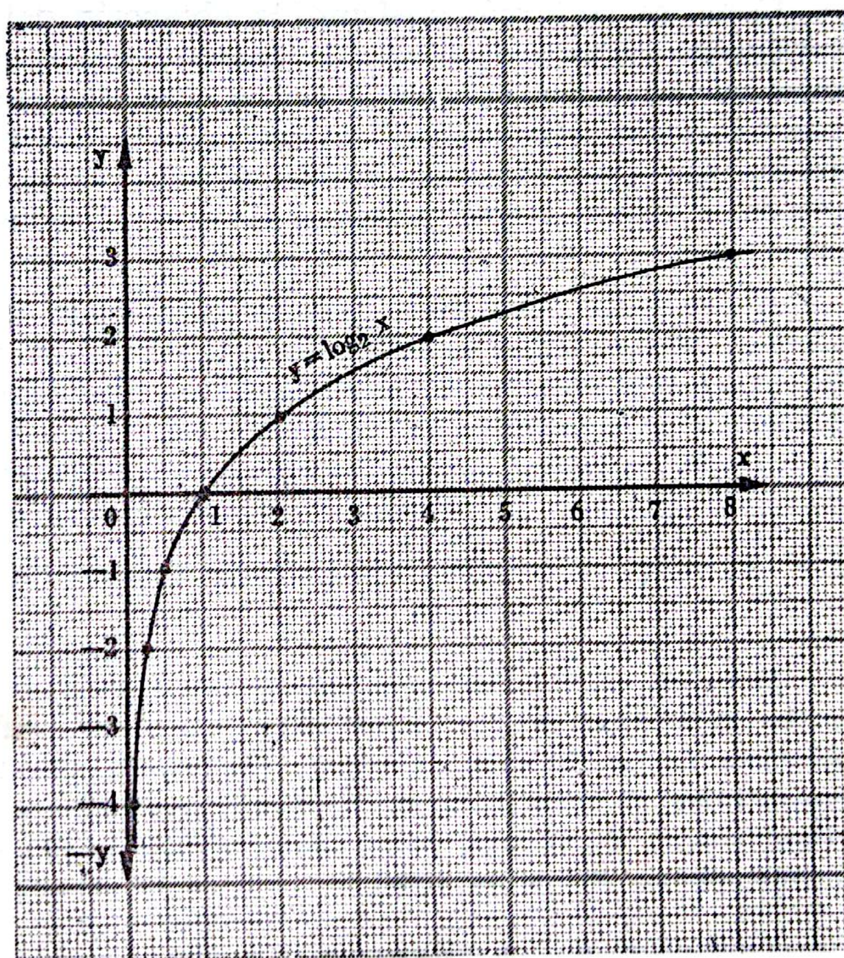
$$\text{Si } x = \frac{1}{16};\ y = \log_2 \frac{1}{16} = -4 \quad \text{pues } \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

Con los resultados obtenidos construimos el cuadro de valores y en base a él, la gráfica correspondiente que figura a continuación.

GRÁFICA

CUADRO DE VALORES

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{16}$	-4



Se observa que la curva de la función logarítmica dada $y = \log_2 x$ decrece rápidamente para los valores de x menores que 1, tendiendo a hacerse tangente al semieje negativo de las ordenadas; se observa también que a medida que crecen los números, crecen sus respectivos logaritmos.

Estas consideraciones de la función logarítmica son válidas para todos los casos en que la base de los logaritmos es mayor que la unidad.

5. Datos históricos. — La teoría logarítmica fue creada para resolver en forma más simple o más rápida el cálculo de los intereses compuestos.

Como se verá más adelante la obtención del monto a interés compuesto implica el cálculo de una potencia, que con los procedimientos ordinarios, es muy laborioso. Por esta razón las instituciones bancarias solicitaron a los matemáticos que buscaran una operación que permitiera el cálculo de esa potencia en forma más rápida, y fueron Neper y Briggs los que solucionaron el problema

Ahora bien, cabe decir que ya en el siglo XVI el matemático alemán Miguel Stifel se había dado cuenta clara de la importancia de estas notables relaciones numéricas, publicando en 1544, en Nüremberg, su *Arithmetica Integra*, que podría llamarse el primer rudimento de tablas de logaritmos, pues destaca en él que los exponentes a que hay que elevar el número 2 para obtener los números $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; ... 64, son los números enteros desde -3 hasta 6.

Pero en verdad, los logaritmos toman cuerpo de teoría con los trabajos de Juan Neper (1550-1617) quien publica en 1614 su obra: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, donde aparece la primera tabla de logaritmos de las funciones trigonométricas. Independientemente de Neper, Jobst Bürgi (1552-1639) calculó una tabla publicada en Praga en 1620.

La base de los logaritmos neperianos está relacionada con el número irracional 2,71828... que designamos con la letra $\underline{e}$ y los logaritmos en esta base $\underline{e}$ se llaman logaritmos naturales.

Los trabajos de Neper condujeron a Briggs a estudiar los logaritmos, quien publica en 1617, la primera Tabla de los logaritmos

decimales, es decir, en base 10. En esta tabla figuran los logaritmos decimales de los números naturales comprendidos entre 1 y 1 000 ; Briggs continúa sus cálculos de logaritmos y en 1 624 publica su *Arithmetica Logarithmica*, donde expone su método para el cálculo de los logaritmos y donde figuran los logaritmos de 1 a 20 000 y desde 90 000 a 100 000. El cálculo de los logaritmos de los números comprendidos entre 20 000 y 90 000 fue completado por Vlacq.

La primera tabla de logaritmos en base e fue publicada en 1619 por Speidell en su *New Logarithmes*.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

6. Propiedad uniforme. — *Los logaritmos de números iguales, en la misma base, son iguales.*

Simbólicamente:

$$\text{Si} \qquad m = n$$

$$\text{es} \qquad \log_b m = \log_b n$$

7. *La logaritmación no es distributiva con respecto a la suma, a la resta, a la multiplicación, ni a la división,* como lo comprobamos respectivamente en los siguientes ejemplos:

1º Siendo: $\log_2 (2 + 4 + 8 + 2) = \log_2 16 = 4$

y $\log_2 2 = 1$

$\log_2 4 = 2$

$\log_2 8 = 3$

$\log_2 2 = 1$

puede verse que el logaritmo de la suma, que es 4, no es igual a la suma $1 + 2 + 3 + 1 = 7$ de los logaritmos de los sumandos.

2º Siendo: $\log_2 (64 - 32) = \log_2 32 = 5$

y $\log_2 64 = 6$

$\log_2 32 = 5$

puede verse que el logaritmo de la diferencia, que es 5, no es igual a la diferencia, $6 - 5 = 1$, de los logaritmos del minuendo y sustraendo.

De acuerdo con lo observado en estos ejemplos resulta que: para calcular el logaritmo de una suma algebraica es necesario primero efectuar la suma y luego calcular el logaritmo del resultado.

3º Siendo: $\log_5 (25 \times 5) = \log_5 125 = 3$

y $\log_5 25 = 2$

$\log_5 5 = 1$

puede verse que el logaritmo del producto, que es 3, no es igual al producto $2 \times 1 = 2$ de los logaritmos de los factores.

4º Siendo: $\log_4 (64 : 4) = \log_4 16 = 2$

y $\log_4 64 = 3$

$\log_4 4 = 1$

puede verse que el logaritmo del cociente, que es 2, no es igual al cociente $3 : 1 = 3$ de los logaritmos 3 y 1 del dividendo y divisor.

8. Logaritmo de un producto. — En el ejemplo 3º del párrafo anterior hemos visto que:

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_5 5 = 1$$

y $$\log_5 (25 \times 5) = \log 125 = 3$$

Se observa que el logaritmo del producto, que es 3, es igual a la suma $2 + 1$ de los logaritmos 2 y 1 de los factores, es decir:

$$\log_5 (25 \times 5) = \log_5 25 + \log_5 5$$

Esta observación es general, y se demuestra en el siguiente

TEOREMA: *El logaritmo de un producto en una base dada, es igual a la suma de los logaritmos de los factores, en esa misma base.*

H) m, n y p, números positivos.

T) $\log_b (m\,n\,p) = \log_b m + \log_b n + \log_b p$

Demostración. Llamemos x, y, z, respectivamente, a los logaritmos, en base b, de los números m, n y p. Por lo tanto,

siendo: $\log_b m = x$ es $m = b^x$ por definición de logaritmo.
„ $\log_b n = y$ es $n = b^y$ „ „ „ „
„ $\log_b p = z$ es $p = b^z$ „ „ „ „

Mult. m. a m.: $m\,n\,p = b^x\, b^y\, b^z$

Efectuando el producto de potencias de igual base, en el segundo miembro

$$m\,n\,p = b^{(x+y+z)}$$

Luego, $(x+y+z)$ es el exponente al que es necesario elevar la base b para obtener el número $(m\,n\,p)$; por consiguiente, según la definición de logaritmo es el logaritmo de dicho número, en base b

o sea

$$\log_b (m\,n\,p) = x + y + z \qquad [1]$$

Pero, $x = \log_b m$; $y = \log_b n$; $z = \log_b p$.
Luego, reemplazando en [1]:

$$\boxed{\log_b (m\,n\,p) = \log_b m + \log_b n + \log_b p}$$

que es la tesis.

9. Logaritmo de un cociente. — TEOREMA. *El logaritmo de un cociente en una base dada, es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el del divisor, en la base considerada.*

H) m y n, números positivos.

T) $\log_b (m : n) = \log_b m - \log_b n$.

Demostración. Llamemos x al logaritmo de m en base b e y al logaritmo de n en base b.

Por lo tanto:

$x = \log_b m \quad \therefore \quad m = b^x$ por definición de logaritmo.

$y = \log_b n \quad \therefore \quad n = b^y$ " " " "

Div. m. a m.: $m : n = b^x : b^y$

Efectuando el cociente de potencias de igual base en el segundo miembro:

$$m : n = b^{(x-y)}$$

Luego, $(x - y)$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener el cociente $(m : n)$; por consiguiente, según la definición de logaritmo, resulta:

$$\log_b (m : n) = x - y \qquad [1]$$

y como: $x = \log_b m$ é $y = \log_b n$ reemplazando en [1], resulta:

$$\boxed{\log_b (m : n) = \log_b m - \log_b n}$$

que es la tesis.

EJEMPLO:

$$\log_{10}(100\,000 : 100) = \log_{10} 100\,000 - \log_{10} 100 = 5 - 2 = 3$$

10. Logaritmo de una potencia. — Sea, por ejemplo, calcular:

$$\log_2 8^4$$

Como

$8^4 = 1\,024$, es: $\log_2 8^4 = \log_2 1\,024 = 12$ pues $1\,024 = 2^{12}$.

Teniendo en cuenta que el logaritmo de 8 en base 2, es 3, o sea:

$$\log_2 8 = 3$$

se observa que 12, que es el logaritmo de la potencia, es igual al producto del exponente 4 por el logaritmo 3 de la base de la potencia.

Es decir:

$$\log_2 8^4 = 4 \log_2 8$$

Esta observación es general y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *El logaritmo de toda potencia de base positiva es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia.*

H) a^n, siendo a número positivo.

T) $\log_b a^n = n \log_b a$

Demostración. Sea x el logaritmo de a en base b, es decir:

$$\log_b a = x$$

Esta expresión de acuerdo con la definición de logaritmo significa que

$$a = b^x$$

Elevando ambos miembros de esta igualdad a la enésima potencia, se tiene:

$$a^n = (b^x)^n$$

Efectuando la potencia de potencia indicada en el segundo miembro

$$a^n = b^{x\,n}$$

Luego, $(x \cdot n)$ es el exponente al que debe elevarse b, para obtener a^n; por consiguiente, es por definición:

$$\log_b a^n = x \cdot n$$

o sea:

$$\log_b a^n = n \cdot x \qquad [1]$$

Pero:

$$x = \log_b a$$

Luego, reemplazando en [1], resulta:

$$\boxed{\log_b a^n = n \log_b a}$$

que es la tesis.

11. Logaritmo de una raíz. — TEOREMA. *El logaritmo de una raíz de radicando positivo es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice*

H) $\sqrt[n]{a}$; a, número positivo.

T) $\log_b \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log_b a}{n}$

Demostración. Este teorema se deduce directamente del anterior, teniendo en cuenta que según la definición de potencia con exponente fraccionario, es:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Luego:

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \log_b a^{\frac{1}{n}} \qquad [1]$$

pero, según el teorema anterior:

$$\log_b a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_b a$$

Reemplazando en [1]:

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_b a$$

que puede escribirse:

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{\log_b a}{n}}$$

que es la tesis.

EJEMPLO:

$$\log_5 \sqrt[3]{625} = \frac{\log_5 625}{3} = \frac{4}{3}$$

12. OBSERVACIONES. 1º *El logaritmo del número elegido como base de los logaritmos es* 1.

En efecto, el exponente al cual hay que elevar la base, para obtener esa misma base, es 1.

En símbolos:

$$\log_b b = 1 \quad \text{pues} \quad b = b^1$$

EJEMPLO:

$$\log_9 9 = 1 \quad \text{pues} \quad 9 = 9^1$$

2º *El logaritmo del número* 1, *en cualquier base, es igual a cero.* En efecto, la potencia cero de cualquier número (distinto de cero) es igual a 1; luego el exponente al que hay que elevar la base para obtener 1 es cero.

En símbolos:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{pues} \quad 1 = b^0 \qquad (b \neq 0)$$

EJEMPLO:

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \text{pues} \quad 1 = 10^0$$

3º De acuerdo con las propiedades que acabamos de estudiar, la logaritmación simplifica el cálculo transformando la multiplicación en suma; la división en resta; la potenciación en multiplicación y la radicación en división.

LOGARITMOS DECIMALES.

Estudiaremos especialmente los logaritmos que adoptan como base el número 10, llamados por esta razón *logaritmos decimales.*

En adelante, consideraremos únicamente estos logaritmos, salvo indicación especial; por consiguiente, no escribiremos la base 10 en la notación de logaritmos decimales. Así:

$$\log a \text{ significa } \log_{10} a$$

$$\log 258 \text{ significa } \log_{10} 258\,.$$

13. **Característica y mantisa.** — Todo número que es potencia entera de 10 tiene como logaritmo decimal un número entero. Por ejemplo:

$$\log 10 = 1 \quad \text{pues} \quad 10 = 10^1$$

$$\log 100 = 2 \quad \text{pues} \quad 100 = 10^2$$

$$\log 100\,000 = 5 \quad \text{pues} \quad 100\,000 = 10^5$$

En cambio, un número que no es potencia entera de 10 tiene como logaritmo decimal un número que no es entero. Por ejemplo, el número 83, que está comprendido entre 10 y 100, tiene un logaritmo que es mayor que el de 10 y menor que el de 100 pues según hemos visto, en los logaritmos de base mayor que 1, a mayor número corresponde mayor logaritmo.

Es decir:

Por ser: $$10 < 83 < 100$$

es: $$\log 10 < \log 83 < \log 100$$

o sea: $$1 < \log 83 < 2\,.$$

Es decir que el logaritmo de 83 es igual a 1 y fracción.

En símbolos:

$$\log 83 = 1{,}\underline{r}\,\underline{s}\,\underline{t}$$

donde $\underline{r}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$ son cifras decimales.

En general, el logaritmo decimal de un número está expresado por una parte entera y una parte decimal.

Simbólicamente:

$$\log n = x, \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$$

La parte entera x se llama *característica* del logaritmo, y la parte decimal, $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$, *mantisa* del logaritmo.

14. Reglas para la determinación de la característica.

a) CARACTERÍSTICA CORRESPONDIENTE A NÚMEROS MAYORES QUE 1.

Siendo: $\log 1 = 0$

y $\log 10 = 1$

se deduce que los números de una cifra entera, es decir, comprendidos entre 1 y 10, por ejemplo: 5; 9; 3,82; 6,045; etc., tienen un logaritmo mayor que 0 y menor que 1, o sea de la forma $0, \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$.

Luego, los logaritmos de *los números de una cifra entera tienen característica cero.* (Obsérvese que 0 es igual al número de cifras enteras, 1, menos 1).

Siendo: $\log 10 = 1$

y $\log 100 = 2$

se deduce que todo número de 2 cifras enteras, es decir, mayor que 10 y menor que 100, como por ejemplo: 36; 11,75; 98; 40,912; etc., tienen un logaritmo mayor que 1 y menor que 2, o sea de la forma $1, \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$. Luego, los logaritmos de *los números de dos cifras enteras tienen por característica* 1. (Obsérvese que 1 es igual al número de cifras enteras, 2, menos 1).

Siendo: $\log 100 = 2$

y $\log 1\,000 = 3$

se deduce razonando como en los casos anteriores, que: *los números*

de tres cifras enteras tienen un logaritmo de característica 2. (Obsérvese que $2 = 3 - 1$).

Del mismo modo llegaríamos a establecer que: *los números de cuatro cifras enteras tienen un logaritmo de característica* 3. (Obsérvese que $3 = 4 - 1$), etc.

Y así siguiendo, se llega a establecer que:

CIFRAS ENTERAS DEL NÚMERO	CARACTERÍSTICA DEL LOGARITMO
4	$4 - 1 = 3$
5	$5 - 1 = 4$
.	.
.	.
.	.
n	$n - 1$

Generalizando todas estas observaciones, se enuncia la siguiente:

REGLA. 1ª *La característica del logaritmo de un número mayor que* 1 *es igual al número de cifras enteras del mismo, menos* 1.

EJEMPLOS:

1º Característica del log $7{,}5 = 0$, pues hay una sola cifra entera, que es siete, y restándole 1, resulta 0.

2º Característica del log $5\,938 = 3$, pues hay cuatro cifras enteras, y $4 - 1 = 3$.

3º Característica del log $60\,100 = 4$, pues hay cinco cifras enteras, y $5 - 1 = 4$.

4º Característica del log $43{,}015 = 1$, pues hay dos cifras enteras, y $2 - 1 = 1$.

b) CARACTERÍSTICA CORRESPONDIENTE A NÚMEROS MENORES QUE 1.

$$\text{Siendo:}\quad \log\ 1 = 0$$
$$\text{y}\quad \log 0{,}1 = -1 \quad \text{pues} \quad 0{,}1 = 10^{-1}$$

se deduce que todos los números comprendidos entre 0,1 y 1, por ejemplo 0,9; 0,315; 0,804 6; etc., es decir, que tienen un solo cero delante de la primera cifra significativa, tienen un logaritmo mayor que -1 y menor que 0, es decir, igual a -1 más una fracción positiva, $0,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$, de tal modo que la suma resulta menor que 0. La suma $-1+0,a\,b\,c\,d\,e$ se indica mediante la notación:

$$\bar{1},\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e},$$

donde la característica es -1, y la mantisa, $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$, es positiva; el signo menos se traza sobre la característica para indicar que afecta únicamente a ella. (Obsérvese que hay un solo cero delante de la primera cifra significativa del número y la característica tiene valor absoluto 1).

$$\text{Siendo:}\quad \log\ 0{,}1 = -1$$
$$\text{y}\quad \log 0{,}01 = -2 \quad \text{pues} \quad 0{,}01 = 10^{-2}$$

se deduce que todos los números mayores que 0,01 y menores que 0,1, por ejemplo: 0,087; 0,04; 0,059 3; etc., es decir, que tienen dos ceros delante de la primera cifra significativa, tienen un logaritmo mayor que -2 y menor que -1, o sea que está formado por la característica -2 y una mantisa positiva; un logaritmo de esa forma se indica así:

$$2,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$$

(Obsérvese que hay dos ceros delante de la primera cilra significativa y que la característica tiene valor absoluto 2).

Se deduce, razonando como en los casos anteriores, que los números que tienen tres ceros delante de la primera cifra significativa tienen un logaritmo de la forma:

$$\bar{3},\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$$

Del mismo modo, llegaríamos a establecer que los números que tienen cuatro ceros delante de la primera cifra significativa tienen una característica -4, etc.

Así siguiendo, se llega a establecer que:

CEROS QUE FIGURAN DELANTE DE LA PRIMERA CIFRA SIGNIFICATIVA DEL NÚMERO	CARACTERÍSTICA DEL LOGARITMO
4	-4
5	-5
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
n	$-n$

Generalizando todas estas observaciones, se enuncia la siguiente:

REGLA 2ª *Los logaritmos de los números positivos menores que* 1 *tienen característica negativa, cuyo valor absoluto es igual al número de ceros que preceden a la primera cifra significativa.*

EJEMPLO:

1º Característica del $\log 0{,}002\,7 = \overline{3}$, pues hay tres ceros delante de la primera cifra significativa.

2º Característica del $\log 0{,}300\,4 = \overline{1}$, pues hay un solo cero delante de la primera cifra significativa.

15. Según las reglas anteriores, determinamos inmediatamente la característica del logaritmo de cualquier número positivo.

Como la determinación de las mantisas no es inmediata, ellas están consignadas en tablas especiales llamadas *Tablas de logaritmos*, cuyo manejo estudiaremos más adelante.

Supongamos tener que calcular el logaritmo de 3; el de 30 y el de 300. Calculando las características según la regla, resultan ser, respectivamente 0; 1 y 2, y determinando las mantisas mediante la tabla, resulta para los tres números la misma mantisa 47712; luego:

$$\log 3 = 0{,}47712$$

$$\log 30 = 1{,}47712$$

$$\log 300 = 2{,}47712$$

es decir, que las mantisas de todos estos logaritmos son iguales, e igual también será la mantisa del logaritmo de 3 000, la del logaritmo de 0,3, etc., es decir, la mantisa de los logaritmos de los números que se obtienen multiplicando o dividiendo 3 por la unidad seguida de ceros.

Esta observación es general y se enuncia en el siguiente:

TEOREMA. *La mantisa del logaritmo de un número no altera, si se multiplica o divide el número por la unidad seguida de ceros.*

H) $\log a = c,\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l}$.

T) mantisa del $\log (a \times 10^n) =$ mantisa del $\log \dfrac{a}{10^h} =$ mantisa del $\log a^n$.

Demostración. Recordando que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, se tiene:

$$\log (a \times 10^n) = \log a + \log 10^n$$

como por hipótesis,

$$\log a = c,\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l}$$

y teniendo en cuenta que el logaritmo decimal de 10^n, es el exponente n, es decir:

$$\log 10^n = n$$

Reemplazando en la primera igualdad, se tiene:

$$\log(a \times 10^n) = c,\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l} + n$$

y como n es un número entero, efectuando la suma en el segundo miembro:

$$\log(a \times 10^n) = (c + n),\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l} \qquad [1]$$

donde la característica es $(c + n)$ y la mantisa sigue siendo la misma mantisa $x\,y\,z\,k\,l$ del logaritmo de a.

Análogamente, recordando que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es:

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n$$

reemplazando por sus valores log a y $\log 10^n$, se tiene:

$$\log \frac{a}{10^n} = c,\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l} - n$$

y como n es un número entero, efectuando la diferencia indicada en el segundo miembro, resulta:

$$\log \frac{a}{10^n} = (c - n),\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l} \qquad [2]$$

donde se ve que la característica es $(c - n)$ y la mantisa sigue siendo la misma $\underline{x}\,\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{k}\,\underline{l}$ del logaritmo de a.

Las relaciones [1] y [2] constituyen la tesis del teorema.

16. OBSERVACIÓN. El teorema anterior indica que cuando se tiene que buscar la mantisa del logaritmo de un número, por ejemplo la de 0,428 es lo mismo buscar en la tabla la mantisa del logaritmo de 428, de 4 280, etc.

MANEJO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS.

17. En la logaritmación se presentan dos problemas:

1º Dado un número, hallar su logaritmo.

2º Dado el logaritmo de un número, calcular dicho número. Este número se llama *antilogaritmo* del logaritmo dado.

Para resolver estos dos problemas se utilizan las tablas de logaritmos mencionadas anteriormente. Estas tablas pueden ser de simple o de doble entrada. Pasamos a estudiar el manejo de cada una de ellas.

TABLAS DE SIMPLE ENTRADA.

En dichas tablas figuran en columna los números, en general de 1 hasta 10 000. Frente a ellos, en una segunda columna, las primeras cifras decimales correspondientes a sus logaritmos, es decir, las primeras cifras de la mantisa; en las tablas que usamos comúnmente figuran las cinco primeras cifras decimales. En una tercera columna figuran las diferencias entre cada dos mantisas consecutivas.

A continuación reproducimos una parte de una tabla de logaritmos:

N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D	N	Log	D
1200	07918		1260	10037		1320	12057		1380	13988	
		36			35			33			31
1201	07954		1261	10072		1321	12090		1381	14019	
		36			34			33			32
1202	07990		1262	10106		1322	12123		1382	14051	
		37			34			33			31
1203	08027		1263	10140		1323	12156		1383	14082	
		36			35			33			32
1204	08063		1264	10175		1324	12189		1384	14114	
		36			34			33			31
1205	08099		1265	10209		1325	12222		1385	14145	

En esta tabla, en la columna encabezada por Log figura nada más que la mantisa; en otras tablas, en cambio, están consignadas también las características, pero conviene calcular independientemente la característica y luego leer en la tabla solamente la mantisa.

Observando la tabla reproducida, se ve que al número 1 203 corresponde un logaritmo cuya mantisa es 080 27; al número 1 325, una mantisa igual al 122 22, etc. Observamos también que la diferencia entre dos mantisas consecutivas, por ejemplo, las mantisas correspondientes a 1 261 y 1 262, que es (101 06 — 100 72 = 34), figura ya calculada entre los renglones de esas dos mantisas, en la tercera columna que corresponde a las diferencias.

Para resolver los problemas que se presentan consideraremos tablas de logaritmos en que figuran los números hasta 10 000, es decir, números que no tienen más de cuatro cifras.

Primer problema.

18. *Dado un número calcular su logaritmo.* En este problema hay que destacar dos casos:

1er. Caso: que el número considerado prescindiendo de la coma decimal, si es que la hay, figure en la tabla, en cuyo caso dicha tabla nos da directamente su mantisa; para la tabla a que hacemos referencia, el número entero que resulta al suprimir la coma, no debe tener más de cuatro cifras.

2º Caso: que el número dado, prescindiendo de la coma decimal, si es que la hay, sea mayor que el último número que figura en la tabla, en cuyo caso es necesario un cálculo auxiliar para determinar la mantisa.

Primer caso. Sea, por ejemplo, calcular: $\log 498$.

La característica, según la regla dada, es igual al número de cifras enteras menos 1, o sea: $3 - 1 = 2$.

Para calcular la mantisa, buscamos en la tabla, en la columna de los números el número 498, y frente a él figura la mantisa correspondiente, que es 697 23.

Luego: $\log 498 = 2{,}697\,23$

Obsérvese que como la mantisa del logaritmo de un número no varía si se multiplica dicho número por la unidad seguida de ceros,

al mismo resultado se llega si en la tabla se busca la mantisa correspondiente a 4 980.

EJEMPLO 2º:

Calcular log 35,61.

La característica es igual al número de cifras enteras menos 1, o sea $2 - 1 = 1$.

Calcular la mantisa correspondiente a 35,61 es equivalente a buscar la que corresponde a 356,1; a 3,561; a 3 561, etc., y como 3 561 figura en la tabla, se lee la mantisa correspondiente a él, que es 551 45.

Luego: $\log 35{,}61 = 1{,}551\,45$

EJEMPLO 3º:

Calcular log 0,083 19

En este caso, según se ha visto, la característica es $\overline{2}$ pues hay dos ceros delante de la primera cifra significativa.

Razonando como en los ejemplos anteriores resulta que:

mantisa del log 0,083 19 = mantisa del log 8 319

y como, según las tablas, la mantisa correspondiente a 8 319 es 920 07, resulta

$$\log 0{,}083\,19 = \overline{2}{,}920\,07.$$

SEGUNDO CASO. Sea, por ejemplo:

calcular log 23 715

Según la regla, la característica es $5 - 1 = 4$.

Para el cálculo de la mantisa debemos tener en cuenta que en la tabla considerada figuran solamente los números de cuatro cifras, pero por la propiedad que ya hemos recordado:

mantisa del log 23 715 = mantisa del log 2 371,5

Como el número 2 371,5 es mayor que 2 371 y menor que 2 372 las mantisas correspondientes guardan la misma relación, es decir:

mant. del log 2 371 < mant. del log 23 71,5 < mant. del log 2 372.

Consultamos la tabla y vemos que:

2 371	374 93	18
2 372	375 11	

Por lo tanto, la mantisa correspondiente a 2 371,5 está comprendida entre 374 93 y 375 11; es decir, que dicha mantisa es igual a 374 93 más un cierto número, que llamaremos d, y que no alcanza a 18, o sea:

$$\text{mantisa del log } 2371{,}5 = 374\,93 + d \qquad [1]$$

donde $d < 18$.

Calcularemos ahora el valor de d, razonando así:

Si a 1 (que es la diferencia entre 2 372 y 2 371) corresponde 18

a 0,5 (que es la diferencia entre 2 371,5 y 2 371) corresponde $18 \times 0{,}5 = d$

o sea: $d = 9$

Reemplazando en [1]:

$$\text{mantisa del log } 2\,371{,}5 = 374\,93 + 9 = 375\,02.$$

Luego:

$$\log 23\,715 = 4{,}375\,02.$$

Observaciones: 1º Llamando D a la diferencia tabular, se observa que siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior, la dife-

rencia d, que debemos agregar a la mantisa que se lee en la tabla, es igual a la diferencia tabular D por la diferencia entre el número de cuatro cifras enteras cuya mantisa se busca y el inmediato inferior que figura en la tabla.

18	
1	2
2	4
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	14
9	16

2º En la mayoría de las tablas ya figura calculada aproximadamente la diferencia d, en un cuadro de valores llamado de partes proporcionales.

Así, para nuestro ejemplo, en la misma página en que hallamos la mantisa del log 2 371, figura a un costado el siguiente cuadro de valores, encabezado por 18, que es la diferencia tabular D que nos interesa. En la columna de la izquierda, se busca 5, que es la cifra de los décimos de la diferencia 2 371,5 — 2 371; en la columna de la derecha y a la misma altura se lee 9, que es la diferencia d buscada.

Ejemplo 2º:

Calcular log 4 960,39

De acuerdo con la regla, la característica es 3.

Determinaremos la mantisa según el razonamiento seguido en el ejercicio anterior. Las cuatro primeras cifras forman el número 4 960, que es, de los números que figuran en la tabla, el inmediato inferior a 4 960,39. Luego

4 960 | 695 48

$$9 \quad \therefore \quad d = 0{,}39 \times 9 = 3{,}51$$

El número d se expresa en cifras enteras, despreciando la parte decimal siempre que la primera cifra decimal sea menor que 5 y aumentando en 1 la parte entera si esa primera cifra decimal es igual o mayor que 5. En nuestro caso, como la primera cifra decimal es 5, se aumenta en 1 el 3, y resulta:

$$d = 4$$

Luego, la mantisa buscada es: $695\,48 + 4 = 695\,52$.

En definitiva

$$\log 4\,960{,}39 = 3{,}695\,52$$

EJEMPLO 3º:

Calcular $\log 0{,}003\,267\,8$

La característica es: $\overline{3}$.

El número de cuatro cifras a partir de la primera significativa es 3 267: que es, de los números que figuran en la tabla, el inmediato inferior a 3 267,8 cuya mantisa debemos buscar.

$$3\,267 \quad | \quad 514\,15 \quad \Big| \quad 13 \quad \therefore \quad d = 0{,}8 \times 13 = 10{,}4 \cong 10.$$

En consecuencia:

$$\text{mantisa del } \log 3\,267{,}8 = 514\,15 + 10 = 514\,25.$$

Luego:

$$\log 0{,}003\,267\,8 = \overline{3}{,}514\,25.$$

SEGUNDO PROBLEMA.

19. *Dado el logaritmo de un número, calcular dicho número.*

Como ya hemos dicho antes, este problema puede enunciarse: *dado un logaritmo calcular el antilogaritmo.*

En este problema también se presentan dos casos:

1º: que la mantisa del logaritmo dado figure en la tabla, y 2º, que la mantisa no figure en la tabla.

PRIMER CASO. *La mantisa figura en la tabla.*

EJEMPLO 1º:

Calcular el antilogaritmo de 2,519 04 .

Este problema puede indicarse:

$$\log x = 2{,}519\,04$$

donde x es el número o antilogaritmo que hay que calcular.

Buscamos la mantisa dada en la columna de las mantisas de la tabla, y efectivamente, ella figura en este caso particular. En la tabla leemos:

3 304 | 519 04

Es decir, que el número que corresponde a la mantisa dada es 3 304.

Ahora bien, la característica del log x es 2; luego, según la regla para la determinación de la característica, ese número x tiene tres cifras enteras. Por consiguiente:

$$x = 330{,}4 .$$

EJEMPLO 2º:

Siendo $\log x = \overline{2}{,}876\,85$, calcular x.

Buscamos en la tabla la mantisa 876 85 y vemos que:

7 531 | 876 85

Es decir, el número correspondiente es 7 531.

Pero como la característica del log x es $\overline{2}$, el antilogaritmo debe tener dos ceros delante de la primera cifra significativa. Luego:

$$x = 0{,}075\,31$$

EJEMPLO 3º:

Hallar el antilogaritmo de 4,749 66 .

Buscamos en la tabla y encontramos:

$$5\,619 \quad | \quad 749\,66$$

Como en nuestro caso la característica es 4, el número buscado x debe tener cinco cifras enteras. Completamos las cinco cifras agregando un cero a 5 619.

Luego:

$$x = 56\,190$$

SEGUNDO CASO. *La mantisa no figura en la tabla.*

EJEMPLO 1º:

Sea calcular el antilogaritmo de 3,456 85.

Es decir:

$$\log x = 3{,}456\,85.$$

Buscamos en la tabla en la columna correspondiente a las mantisas y vemos que en este caso la mantisa 456 85 no figura. Leemos:

2 863	456 82	15
2 864	456 97	

Como la mantisa buscada está comprendida entre 456 82 y 456 97, el número que corresponde a dicha mantisa debe estar comprendido entre los números correspondientes a esas mantisas, que son 2 863 y 2 864. Es decir

$$2\,863 < x < 2\,864$$

Por lo tanto, x será igual a 2 863 más una parte decimal que llamaremos δ, es decir, x será de la forma:

$$x = 2\,863 + \delta \qquad [1]$$

donde δ es menor que 1, pues el número buscado debe ser menor que 2 864. Para calcular δ razonamos así:

Si a $15\left(\begin{matrix}\text{que es la diferencia}\\ \text{entre 45 697 y 45 682}\end{matrix}\right)$ corresponde $1\left(\begin{matrix}\text{que es la diferencia}\\ \text{entre 2 864 y 2 863}\end{matrix}\right)$

$$a\ 3\ \left|\begin{matrix}\text{que es la diferencia}\\ \text{entre 45 685 y 45 682}\end{matrix}\right| \text{corresponde } \frac{1 \times 3}{15} = \delta$$

$$\text{o sea} \quad \delta = 0{,}2$$

Reemplazando en [1]:

$$x = 2\,863 + 0{,}2 = 2\,863{,}2$$

y como la característica de log x es 3, el antilogaritmo debe tener cuatro cifras enteras.

Luego:

$$x = 2\,863{,}2\,.$$

OBSERVACIONES. 1º δ es igual a la diferencia que se obtiene al restar de la mantisa dada la inmediata inferior que figura en la tabla, dividida por la diferencia tabular, D.

15	
1	2
2	3
3	5
4	6
5	8
6	9
7	11
8	12
9	14

2º Para el cálculo de δ, también pueden utilizarse las tablitas de partes proporcionales. Así, para nuestro ejemplo, en la tablita encabezada por 15, que es la diferencia tabular que nos interesa, buscamos a la *derecha* la diferencia entre nuestra mantisa y la inmediata inferior, que es 3, y a la misma altura, en la columna de la izquierda, figura la cifra de los décimos de δ, que en este caso es 2.

3º En general conviene buscar las mantisas en las tablas comunes, entre las que corresponden a los números de cuatro cifras.

EJEMPLO 2º:

Siendo $\log x = \overline{1}{,}67942$, calcular el antilogaritmo x.

Buscamos en la tabla, en la columna de las mantisas y vemos que 679 42 no figura; la mantisa inmediata inferior que encontramos es 679 34. Leemos:

$$\begin{array}{r|l|l} 4\,779 & 679\,34 & \\ & & 9 \end{array}$$

Como:

$$679\,42 - 679\,34 = 8 \quad \text{es} \quad \therefore \quad \delta = \frac{8}{9} = 0{,}88\ldots$$

Luego, el número que corresponde a la mantisa dada es:

$$\begin{array}{r} 4\,779 \\ +\quad 0{,}8\ldots \\ \hline 4\,779{,}8\ldots \end{array}.$$

Como la característica es $\overline{1}$, el antilogaritmo x debe tener un cero delante de la primera cifra significativa. Por lo tanto:

$$x = 0{,}477\,98\,.$$

Al calcular δ, que en este caso resultó 0,88..., podría haberse redondeado a 0,9, obteniéndose así el resultado:

$$x = 0{,}477\,99 \qquad \text{igualmente válido}.$$

Tablas de doble entrada.

En estas tablas, en la primera columna no figura el número completo sino solamente las primeras cifras del mismo, hasta la de las decenas inclusive; la cifra de las unidades debe buscarse en el primer renglón que encabeza la página, renglón donde figuran todos los números dígitos, es decir desde 0 hasta 9. Luego, para leer un número es necesario completar la lectura de la primera columna con la del primer renglón y en la intersección de la fila y columna correspondiente figura la mantisa del logaritmo de dicho número. En la tabla no figuran repetidas las primeras cifras de la mantisa ni las

primeras cifras del número. Así, por ejemplo, en la parte de la página de una tabla de doble entrada, que figura a continuación, el número 1 800 se lee: 180 en la primera fila de la primera columna y la cifra 0 de las unidades en el primer recuadro del renglón que encabeza la página; la mantisa correspondiente a su logaritmo figura entonces en la intersección de la primera fila y de la columna encabezada por 0, y es 255 27; el número 1835 se lee: las 18 centenas en la primera fila de la primera columna; la cifra 3 de las decenas en la cuarta fila de la primera columna y la cifra 5 de las unidades en el sexto recuadro del renglón que encabeza la página. En la intersección de la cuarta fila y dicha columna encabezada por 5 figura la mantisa que es 263 64.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	25 527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
1	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
2	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
3	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
4	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
5	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
6	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
7	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
8	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
9	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
1	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
2	28 330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
3	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
4	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
5	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
6	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
7	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
8	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
9	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081

Cuando cambian las cifras de los millares en la mantisa y no hay espacio en la tabla para hacer figurar este cambio, se indica con un asterisco que se dibuja delante de las últimas cifras de la mantisa que figuran en la tabla.

Así, por ejemplo, la mantisa correspondiente al logaritmo de 1 863 es 27 021.

En estas tablas no figuran calculadas las diferencias entre dos mantisas consecutivas, de modo que, cuando es preciso interpolar,

se deben calcular previamente dichas diferencias restando de la mantisa mayor, la inmediata inferior.

20. Cálculo de productos y cocientes, mediante logaritmos. — Según hemos visto en el parágrafo anterior, dado un número puede calcularse su logaritmo y, recíprocamente, conociendo el logaritmo de un número puede calcularse el antilogaritmo, que es dicho número.

Luego, mediante el cálculo logarítmico, es posible calcular el valor de expresiones en que figuran productos, cocientes, potencias y raíces, o bien una sola de esas operaciones, pues dichas expresiones son calculables por logaritmos, es decir, puede calcularse su logaritmo mediante las reglas de logaritmación ya estudiadas, y una vez obtenido el logaritmo se halla el antilogaritmo, que es el valor de dicha expresión.

Consideraremos primero un ejemplo en que sólo intervengan productos y cocientes.

Sea, por ejemplo, calcular mediante logaritmos:

$$\frac{1\,856 \times 278}{0{,}981}$$

Cálculo del logaritmo.

La expresión general es un cociente, luego su logaritmo es igual al logaritmo del dividendo 1 856 × 278 menos el logaritmo del divisor 0,981, es decir:

$$\log \frac{1\,856 \times 278}{0{,}981} = \log (1\,856 \times 278) - \log 0{,}981$$

Pero log (1 856 × 278) es el logaritmo de un producto; por consiguiente es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores; luego:

$$\log \frac{1\,856 \times 278}{0{,}981} = \log 1\,856 + \log 278 - \log 0{,}981 \qquad [1]$$

Según las reglas para obtener las características, y mediante las tablas, calculamos cada uno de estos logaritmos, que resultan ser:

$$\log 1\,856 = 3{,}268\,58$$
$$\log 278 = 2{,}444\,04$$
$$\log 0{,}981 = \bar{1}{,}991\,67$$

Según [1], sumamos los dos primeros logaritmos:

$$\begin{array}{r} 3{,}268\,58 \\ +\quad 2{,}444\,04 \\ \hline 5{,}712\,62 \end{array}$$

y de este resultado restamos el log de 0,981, es decir:

$$\begin{array}{r} 5{,}712\,62 \\ -\quad \bar{1}{,}991\,67 \\ \hline 5{,}720\,95 \end{array}$$

Obsérvese que al restar las características, el 5 se transformó en 4, por la unidad que cedió a la de orden inmediato inferior para poder efectuar la resta; y restar de 4 la característica -1 equivale a sumarle 1, pues:

$$4 - (-1) = 4 + 1 = 5\,.$$

Luego:

$$\log \frac{1\,856 \times 278}{0{,}981} = 5{,}720\,95\,.$$

Por lo tanto, para obtener el valor de la expresión $\dfrac{1\,856 \times 278}{0{,}981}$ debemos buscar el antilogaritmo de 5,720 95.

Cálculo del antilogaritmo.

Según hemos visto, buscamos el número que corresponde a la mantisa, 720 95; ésta no figura en nuestras tablas. Buscamos entonces la inmediata inferior y leemos:

$$\begin{array}{c|c|l} 5\,259 & 720\,90 & \\ & & 9 \end{array}$$

Como

$$720\,95 - 720\,90 = 5 \qquad \text{es} \qquad \delta = \frac{5}{9} = 0{,}555\ldots$$

Luego:

$$5\,259 + 0{,}555\ldots = 5\,259{,}555\ldots$$

y como la característica de nuestro logaritmo es 5, quiere decir que el número buscado tiene seis cifras enteras, es decir:

$$\text{antilog } 5{,}720\,95 = 525\,955{,}5$$

pero 5,720 95 es el logaritmo de la expresión dada

$$\frac{1\,856 \times 278}{0{,}981}$$

luego 525 955,55 es el valor de esa expresión, o sea:

$$\frac{1\,856 \times 278}{0{,}981} = 525\,955{,}55$$

y así hemos resuelto el problema propuesto, de calcular mediante logaritmos el valor de la expresión dada.

Al calcular δ, que en este caso resultó 0,555 . . . podría haberse redondeado a 0,56 obteniéndose el resultado 525 956, igualmente válido.

21. Cologaritmo. — Se llama cologaritmo de un número a la diferencia entre 0 y el logaritmo de dicho número.

Cologaritmo de n se indica colog n

luego, según la definición:

$$\text{colog } n = 0 - \log n$$

EJEMPLO 1º:

Sea calcular el cologaritmo de 3 790.

Según la definición, es:

$$\text{colog } 3\,790 = 0 - \log 3\,790$$

$$\text{pero} \quad \log 3\,790 = 3{,}578\,64$$

$$\text{luego,} \quad \text{colog } 3\,790 = 0 - 3{,}578\,64$$

Efectuando la operación:

$$\begin{array}{r} 0{,}000\,00 \\ - \quad 3{,}578\,64 \\ \hline \bar{4}{,}421\,36 \end{array}$$

Obsérvese que al restar el 0 entero del minuendo se ha transformado en -1, por la unidad que ha cedido para hacer posible la resta.

Luego, la operación entre las partes enteras es:

$$-1 - 3 = -4$$

es decir, que:

$$\text{colog } 3\,790 = \bar{4}{,}421\,36\,.$$

EJEMPLO 2º:

Sea calcular el cologaritmo de 0,008 6.

Según definición:

$$\text{colog } 0{,}008\,6 = 0 - \log 0{,}008\,6$$

$$\text{pero} \quad \log 0{,}008\,6 = \bar{3}{,}934\,50$$

$$\text{luego,} \quad \text{colog } 0{,}008\,6 = 0 - \bar{3}{,}934\,50$$

y efectuando la diferencia del segundo miembro:

$$\operatorname{colog} 0{,}008\,6 = 2{,}065\,50$$

NOTA: Se puede calcular directamente el cologaritmo de un número aplicando la siguiente

REGLA PRÁCTICA. Se calcula el logaritmo del número dado, y luego el cologaritmo se forma así: 1º Se cambia de signo la característica del logaritmo y se le resta 1, obteniéndose la característica del cologaritmo.

2º Se escribe el complemento a nueve de cada una de las cifras de la mantisa, excepto de la última significativa de la derecha, de la que se escribe su complemento a 10; se obtiene así la mantisa del cologaritmo.

Apliquemos la regla a los ejemplos anteriores, y comparemos los resultados.

1º colog 3 790 .

Siendo

$$\begin{array}{lcccccc} \log 3\,790 = & 3, & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 \end{array}$$

según la regla, es:

$$\begin{array}{lcccccc} & \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 10 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \\ & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ \operatorname{colog} 3\,790 = & \overline{4}, & 4 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{array}$$

que coincide, efectivamente, con el resultado anterior.

2º colog 0,008 6 .

Siendo:

$$\begin{array}{lccccc} \log 0{,}008\,6 = & \overline{3}, & 9 & 3 & 4 & 5\ 0 \end{array}$$

Según la regla, y siendo en este caso, 5 la última cifra significativa de la derecha, es:

$$\begin{array}{lccccc} & \left(-\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 9 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) & \left(-\begin{smallmatrix} 10 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \\ & \| & \| & \| & \| & \| \\ \operatorname{colog} 0{,}008\,6 = & 2, & 0 & 6 & 5 & 5 \end{array}$$

y como se acostumbra escribir las cinco primeras cifras decimales de la mantisa se completa con el cero a la derecha, lo que no altera el valor; se tiene así;

$$\text{colog } 0{,}008\,6 = 2{,}065\,50\,,$$ que coincide con el resultado anterior.

22. Observación. Veamos ahora a qué se debe la introducción del cologaritmo. Cuando se trata de hallar el logaritmo de un cociente, según sabemos, debemos restar del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y esta operación presenta cierta dificultad cuando la característica de dicho logaritmo es negativa. Este inconveniente se salva mediante el cologaritmo, pues restar el logaritmo de un número equivale a sumar su cologaritmo, es decir:

$$a - \log n = a + \text{colog } n$$

En efecto es así, pues una expresión no altera si se le suma 0, luego

$$a - \log n = a - \log n + 0 \qquad [1]$$

Pero

$$a - \log n + 0 = a + 0 - \log n$$

que a su vez podemos escribir:

$$a - \log n + 0 = a + (0 - \log n)$$

y como, por definición:

$$(0 - \log n) = \text{colog } n$$

se tiene:

$$a - \log n + 0 = a + \text{colog } n$$

y reemplazando en [1] el segundo miembro por el valor hallado, resulta

$$a - \log n = a + \text{colog } n$$

que es lo que queríamos probar.

Luego, se comprende que al calcular el logaritmo de un cociente, en vez de restar el logaritmo del divisor, puede sumarse el cologaritmo del mismo, o sea que podemos enunciar:

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo más el cologaritmo del divisor.

En símbolos: $\log (n : m) = \log n + \operatorname{colog} m$

EJEMPLO:

$$\log (276 : 0{,}89) = \log 276 + \operatorname{colog} 0{,}89$$

Como: $\log 276 = 2{,}440\,91$

y $\log 0{,}89 = \bar{1}{,}949\,39$ $\therefore$ $\operatorname{colog} 0{,}89 = 0{,}050\,61$

Sumando m. a m.: $\log 276 + \operatorname{colog} 0{,}89 = 2{,}491\,52$

o sea: $\log (276 : 0{,}89) = 2{,}491\,52$

NOTA: En el cálculo del colagaritmo de un producto, un cociente, una potencia o una raíz, se aplican las mismas reglas que para el logaritmo.

23. Cálculo de potencias y raíces, mediante logaritmos.

Sea, por ejemplo:

Calcular mediante logaritmos $2{,}615^5$.

Según hemos visto, el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base; luego:

$$\log 2{,}615^5 = 5 \log 2{,}615 = 5 \times 0{,}417\,47 = 2{,}087\,35 .$$

La potencia buscada es el antilogaritmo de $2{,}087\,35$. Buscamos el número que corresponde a la mantisa 08 735, y, según las tablas, se tiene:

$$1\,222 \mid 087\,07 \quad \Big| \; 36 \quad \text{(nuestra diferencia es 28 y la de la tabla 36)} \quad \therefore \quad \text{calculamos: } \delta = \frac{28}{36} = 0{,}77\ldots$$

Luego: $1\,222 + 0{,}77\ldots = 1\,222{,}77\ldots$

Como la característica de nuestro logaritmo es 2, el número buscado tiene tres cifras enteras, es decir:

$$\text{antilog } 2{,}087\,35 = 122{,}277$$

o sea:

$$2{,}615^5 = 122{,}277\ .$$

EJEMPLO 2º:

Supongamos ahora que la base de la potencia sea menor que 1, por ejemplo:

Calcular: $0{,}419^3$

$$\log 0{,}419^3 = 3 \log 0{,}419 = 3 \times \overline{1}{,}622\,21 = \overline{2}{,}866\,63\ .$$

Obsérvese que al multiplicar las cifras de la mantisa por 3, después de escribir el 8, se lleva una unidad positiva, y entonces, para la característica se tiene: 3 por $(-1) = -3$; más 1 que se llevaba, igual a -2.

El valor de la potencia buscada es igual al antilogaritmo de $\overline{2}{,}866\,63$.

En la tabla leemos:

$$7\,355 \mid 866\,58 \quad \Big| \; 6 \quad \therefore \quad \delta = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

$$7\,355 + 0{,}8 = 7\,355{,}8$$

y como la característica es $\overline{2}$, el valor buscado debe tener dos ceros antes de la primera cifra significativa, es decir:

$$\text{antilog } \overline{2},866\,63 = 0,073\,558$$

o sea:

$$0,419^3 = 0,073\,558 .$$

EJEMPLO 3º:

Supongamos ahora que el exponente de la potencia sea negativo; por ejemplo, calcular:

$$12,5^{-2}$$

Recordando la definición de potencia de exponente negativo, es:

$$12,5^{-2} = \frac{1}{12,5^2} .$$

Aplicando logaritmos, se tiene:

$$\log 12,5^{-2} = \log \frac{1}{12,5^2} = \log 1 + \text{colog } 12,5^2 \qquad [1]$$

pero: $\log 1 = 0$

y $\log 12,5^2 = 2 \log 12,5 = 2 \times 1,096\,91 = 2,193\,82$

$$\therefore \text{ colog } 12,5^2 = \overline{3},806\,18$$

Luego reemplazando en [1]

$$\log 12,5^{-2} = \overline{3},806\,18 .$$

Por lo tanto:

$$12,5^{-2} = \text{antilog } \overline{3},806\,18 .$$

Luego, según la tabla y teniendo en cuenta que la característica es -3;

$$\text{antilog } \bar{3},806\,18 = 0,006\,4$$

es decir:

$$12,5^{-2} = 0,006\,4$$

EJEMPLO 4º:

Sea calcular: $\sqrt[5]{9\,814}$

Cálculo del logaritmo.

Como el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice, se tiene:

$$\log \sqrt[5]{9\,814} = \frac{\log 9\,814}{5}$$

Como

$$\log 9\,814 = 3,991\,85$$

resulta:

$$\log \sqrt[5]{9\,814} = \frac{3,991\,85}{5} = 0,798\,37$$

OBSERVACIÓN. Cuando al efectuar la división, el cociente no resulta exacto, se redondea la quinta cifra de la mantisa.

Cálculo del antilogaritmo.

En la tabla figura la mantisa 798 37, que corresponde al número 6 286. Como la característica es 0, debe tener una sola cifra entera, es decir: 6,286.

Luego:

$$\sqrt[5]{9\,814} = 6,286$$

24. En la logaritmación de raíces, cuando el radicando es mayor que 1 como ocurre en el ejercicio anterior, su logaritmo tiene característica positiva o nula y no ofrece ninguna dificultad al dividir por el índice. Pero cuando el radicando es menor que 1, es necesario efectuar la:

25. División de un logaritmo de característica negativa por un número natural. — Sea, por ejemplo:

Calcular

$$\log \sqrt{0{,}000\,66}$$

Como:

$$\log 0{,}000\,66 = \bar{4}{,}819\,54$$

es:

$$\log \sqrt{0{,}000\,66} = \frac{\bar{4}{,}819\,54}{2}$$

En este caso particular la división es inmediata, pues la característica negativa 4 es múltiplo del divisor 2, y, en consecuencia, la característica del resultado es: $(-4) : 2 = -2$. La mantisa positiva del cociente resulta de dividir la mantisa dada por 2. Luego:

$$\log \sqrt{0{,}000\,66} = \frac{\bar{4}{,}819\,54}{2} = \bar{2}{,}409\,77$$

Ejemplo 2º:

Calcular

$$\log \sqrt[3]{0{,}284\,7}$$

Sabemos que

$$\log \sqrt[3]{0{,}284\,7} = \frac{\log 0{,}284\,7}{3}$$

Como:

$$\log 0{,}284\,7 = \overline{1}{,}454\,39$$

es:

$$\log \sqrt[3]{0{,}284\,7} = \frac{\overline{1}{,}454\,39}{3} \qquad [1]$$

En este caso, no es posible hallar directamente la característica del resultado, pues no existe cociente exacto entre (-1) y 3. El inconveniente desaparece si la característica se transforma en múltiplo del divisor; en este ejemplo, basta agregar (-2) a (-1) para que resulte (-3), que es múltiplo de 3. Luego, la característica del resultado será:

$$(-3) : 3 = -1$$

Pero, para que el dividendo no altere, al haber agregado (-2), agregamos también $(+2)$, y estas dos unidades, con la primera cifra 4 de la mantisa, forman el número 24 décimos que, dividido por 3, da 8; y luego se continúa la división $5 : 3 = 1$, etc., para obtener las otras cifras de la mantisa del cociente. Resulta así:

$$\log \sqrt[3]{0{,}284\,7} = \frac{\overline{1}{,}454\,39}{3} = \overline{1}{,}818\,13$$

En general:

Para dividir un logaritmo de característica negativa por un número natural, cuando la característica no es múltiplo del divisor, se agregan a la característica el menor número de unidades negativas que sea necesario para transformarla en múltiplo del divisor, y, al mismo tiempo, igual número de unidades positivas que se consideran con la mantisa, al efectuar la división.

Ejemplo:

Calcular

$$\log \sqrt{0{,}002\,4}$$

Sabemos que:

$$\log \sqrt{0{,}002\,4} = \frac{\log 0{,}002\,4}{2} = \frac{\overline{3}{,}380\,21}{2}$$

A la característica (-3) basta agregarle (-1), para que se transforme en: (-4), que es múltiplo de 2; luego, la característica $(-4) : 2 = -2$.

La unidad positiva $(+1)$ que se agrega para compensar el (-1), forma con la primera cifra 3 de la mantisa, el número 13; luego $13 : 2 = 6$, etc.

Es decir:

$$\log \sqrt{0{,}002\,4} = \overline{2}{,}690\,10$$

NOTA: Conviene destacar que como se indica en el procedimiento general, el número de unidades negativas que se agregan, es el menor número necesario para transformar la característica en múltiplo del divisor.

Así en el ejemplo:

$$\frac{\overline{2}{,}364\,87}{5}$$

agregando unidades negativas a la característica $\overline{2}$ se puede transformar en distintos múltiplos del divisor 5, tales como $\overline{5}$; $\overline{10}$; $\overline{15}$; $\overline{20}$, etc. De todos ellos se elige el de menor valor absoluto, que es 5.

Luego a la característica $\overline{2}$, se le agrega $\overline{3}$.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Calcular los siguientes logaritmos:

$\log_2 8$; $\log_7 49$; $\log_9 81$; $\log_5 25$; $\log_2 64$; $\log_{11} 1$; $\log_8 64$;

$\log_{15} 15$; $\log_2 32$; $\log_6 \frac{1}{36}$; $\log_2 \sqrt{3}$; $\log_5 \frac{1}{125}$; $\log_9 \frac{1}{81}$;

$\log_2 \sqrt[3]{4}$; $\log_3 243$; $\log_8 512$; $\log_3 9^{11}$; $\log_5 \sqrt{125}$.

Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números:

80,64 ; 3,75 ; 0,007 ; 0,090 3 ; 0,060 4 ; 1 350 ; 1,876 ; 0,8 ; 55,2 ; 703,5 ;
0,300 7 ; 502,1 ; 86,4 ; 6,512 ; 425 ; 6,254 3 ; 1 864,29 ; 831,604 ; 250,25;
0,354 19 ; 78 533 ; 0,014 075 ; 47,81 ; 0,867 24 ; 980,75 ; 5 987,32 ; 12,306 .

Calcular el antilogaritmo de:

2,106 53 ;	1,373 65 ;	3,431 52 ;	5,385 43 ;	6,581 95 ;	2,721 56 ;
$\overline{2}$,621 18 ;	$\overline{1}$,692 14 ;	0,793 65 ;	$\overline{3}$,856 91 ;	0,825 49 ;	1,922 93 ;
$\overline{3}$,075 91 ;	0,892 93 ;	1,975 75 ;	$\overline{2}$,658 77 ;	2,788 80 ;	$\overline{1}$,653,12 ;
3,671 11 ;	2,711 09 ;	1,855 31 ;	0,907 70 ;	$\overline{2}$,425 25 ;	$\overline{3}$,387 06 ;
4,608 14 ;	0,690 92 ;	2,759 62 ;	4,795 80 ;	3,706 02 ;	1,585 77 ;
0,498 84 ;	$\overline{1}$,524 90 ;	2,161 15 ;	1,313 93 ;	3,291 64 ;	0,095 40 ;
$\overline{1}$,773 42 ;	0,384 89 ;	$\overline{1}$,256 30 ;	$\overline{4}$,652 98 ;	2,132 65 ;	3,439 50 ;

Calcular x en las siguientes expresiones:

(Puede ocurrir que los resultados difieran de los que figuran en el texto, en la última cifra significativa por seguir un criterio diferente al redondear las cifras decimales.)

1º). $\log x = \dfrac{1{,}815\ 78}{2}$.

Respuesta: 0,808 9.

2º). $\log x = 0{,}506\ 91 \times 3$.

Respuesta: 33,169.

3º). $x = 345{,}2 \times 4{,}90 \times 0{,}345\ 8$.

Respuesta: 584.91.

4º). $x = 0{,}042\ 15 \times 13{,}51$

Respuesta: 0,569 46.

5º). $x = 45{,}32 : 0{,}143\ 5$.

Respuesta: 315,82.

6º). $x = 0{,}098\ 76 : 1{,}456$.

Respuesta: 0,067 83.

7º). $x = 14{,}19^4$.

Respuesta: 40 543,6.

8º). $x = 0{,}356^3$.

Respuesta: 0,045 118.

9º). $x = \sqrt{34{,}56}$.

Respuesta: 5,878 9.

10º). $x = \sqrt[5]{0{,}098\ 3}$.

Respuesta: 0,628 8.

Calcular el logaritmo de las siguientes expresiones:

1º). $0{,}46 \times 35{,}2$.
Respuesta: 1,209 30.

2º). $9{,}345 \times 0{,}043\,1 \times 541{,}452$.
Respuesta: 2,338 62.

3º). $31{,}482 \times 0{,}001 \times 10\,345$.
Respuesta: 2,512 79.

4º). $436{,}835 \times 2{,}345\,6 \times 0{,}129\,3$.
Respuesta: 2,122 17.

5º). $1{,}25 \times 0{,}048\,9 \times 3{,}545\,34$.
Respuesta: $\overline{1},335\,88$.

6º). $0{,}564 \times 2{,}154\,5 \times 121{,}41$.
Respuesta: 2,168 89.

7º). $9\,462 \times 12\,496$.
Respuesta: 8,072 80.

8º). $54\,675 : 0{,}145\,2$.
Respuesta: 5,575 82.

9º). $145{,}325 : 5\,426$.
Respuesta: $\overline{2},427\,86$.

10º). $2\,794 : 8\,547$.
Respuesta: $\overline{1},514\,42$.

11º). $648{,}057 : 0{,}765$.
Respuesta: 2,927 95.

12º). 152^2.
Respuesta: 4,363 68.

13º). $248{,}6^3$.
Respuesta: 7,186 59.

14º). $52{,}564^2$.
Respuesta: 3,442 86.

15º). $0{,}926^5$.
Respuesta: $\overline{1},833\,05$.

16º). $11{,}25^{-2}$
Respuesta: $\overline{3},897\,70$.

17º). $2{,}165\,9^5$.
Respuesta: 1,678 20.

18º). $1\,569^{-3}$.
Respuesta: $\overline{10},413\,14$.

19º). $845\,3^{\frac{1}{2}}$.
Respuesta: 1,968 51.

20º). $2\,364^{\frac{3}{5}}$.
Respuesta: 2,024 19.

21º). $6{,}193^{\frac{4}{3}}$.
Respuesta: 1,055 87.

22º). $\sqrt[3]{2\,314}$.
Respuesta: 1,121 45.

23º). $\sqrt{45\,632}$.
Respuesta: 2,329 64.

24º). $\sqrt[5]{132{,}69}$.
Respuesta: 0,424 57.

25º). $\sqrt{0{,}008\,07}$.

Respuesta: $\overline{1},392\,29$.

26º). $\sqrt[4]{0{,}534\,6}$.

Respuesta: $\overline{1},932\,01$.

27º). $\sqrt[3]{0{,}089\,2}$.

Respuesta: $\overline{1},650\,12$.

28º). $\sqrt{0{,}002\,698\,6}$.

Respuesta: $\overline{2},715\,57$.

29º). $\sqrt{0{,}126\,92}$.

Respuesta: $\overline{1},551\,77$.

30º). $\dfrac{34{,}52 \times 45{,}627\,6}{13{,}32}$.

Respuesta: 2,072 80.

31º). $5\,614^{2} \times 0{,}93^{6}$.

Respuesta: 7,255 78.

32º). $\dfrac{2\,548 \times 3{,}081\,6 \times 97}{2\,096 \times 1{,}17}$.

Respuesta: 2,492 16.

33º). $\dfrac{7\,540 \times 0{,}041}{54{,}79 \times 1{,}278}$

Respuesta: 0,644 92.

34º). $96 \times 12{,}49^{3}$

Respuesta: 5,271 95.

35º). $35{,}65^{\frac{1}{3}} \times 4{,}250\,8$

Respuesta: 1,145 82.

36º). $27^{3} \times 0{,}129^{\frac{1}{2}} \times 12\,456^{-2}$

Respuesta: 1,658 62.

37º). $(6{,}09 \times 8{,}916 \times 37)^{3}$

Respuesta: 9,908 97.

38º). $\left(92{,}456 \times 23^{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

Respuesta: 3,025 56.

39º). $\left(0{,}756^{2} \times 19 \times 15\right)^{\frac{3}{2}}$

Respuesta: 3,317 82.

40º). $\sqrt[3]{0{,}28 \times 8\,964}$

Respuesta: 1,133 22.

41º). $\sqrt{623 \times 0{,}029\,4}$

Respuesta: 0,631 42.

42º). $\sqrt[3]{765 \times 8{,}93^{2}}$

Respuesta: 1,595 12.

43º). $\sqrt[4]{1\,846 \times 0{,}048^{3} \times 25}$

Respuesta: 0,176 97.

44º). $\sqrt{69 \times 1{,}23^{3} \times 0{,}4}$

Respuesta: 0,855 32.

45º). $\sqrt[3]{4{,}09 \times 5{,}26}$

Respuesta: 0,444 24.

46º). $12{,}6 \times \sqrt{3{,}26}$

Respuesta: 1,356 98.

47º). $\sqrt[5]{871} \times 4{,}7^2$

Respuesta: 1,932 20.

48º). $0{,}163^3 \times \sqrt[3]{283\,653}$

Respuesta: $\overline{1}$,454 17.

49º). $18{,}6^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{5\,702}$

Respuesta: 3,782 29.

50º). $26^4 \times 8{,}1 \times \sqrt[3]{9{,}47}$

Respuesta: 6,893 82.

51º). $0{,}019^2 \times \sqrt[4]{0{,}029} \times 2{,}93$

Respuesta: $\overline{4}$,639 97.

52º). $7{,}8^{-2} \times 543{,}02 \times \sqrt{0{,}001\,7}$

Respuesta: $\overline{1}$,565 87.

53º). $\frac{4}{17} \times \sqrt{0{,}19}$

Respuesta: $\overline{1}$,010 99.

54º). $\left(\frac{15}{28}\right)^2 \times \sqrt[3]{165} \times 846$

Respuesta: 3,124 39.

55º). $\sqrt[5]{0{,}009} \times \frac{7}{62} \times 1{,}067^2$

Respuesta: $\overline{2}$,699 88.

56º). $\sqrt{\frac{23{,}608}{47}}$

Respuesta: $\overline{1}$,850 48.

57º). $\sqrt[3]{\frac{4\,986}{3\,581}}$

Respuesta: 0,047 92.

58º). $\sqrt{\frac{23{,}6 \times 0{,}68}{1{,}73}}$

Respuesta: 0,483 69.

59º). $\sqrt[4]{\frac{949 \times 1\,515}{1\,911 \times 48}}$

Respuesta: 0,298 80.

60º). $\sqrt[3]{\frac{35^2 \times 9}{123}}$

Respuesta: 0,650 82.

61º). $\sqrt[5]{\frac{4\,025 \times 6{,}13}{4\,063}}$

Respuesta: 0,156 68.

62º). $\sqrt{\frac{27^4 \times 0{,}56^2}{98^2}}$

Respuesta: 0,619 68.

63º). $0{,}7 \times \sqrt[3]{\frac{1{,}39 \times 84\,1^2}{96}}$

Respuesta: 1,181 88.

64º). $12{,}9 \times \sqrt{\frac{4{,}321}{807^3}}$

Respuesta: $\overline{3}$,068 08.

65º). $\sqrt{\dfrac{65{,}3^6}{987^{\frac{1}{3}}}}$

Respuesta: 4,038 22.

66º). $\dfrac{\sqrt{2\,977}}{\sqrt[3]{4\,563{,}8}}$

Respuesta: 0,517 11.

67º). $\dfrac{\sqrt[5]{19{,}26}}{\sqrt[4]{2{,}56}}$

Respuesta: 0,154 87.

68º). $\sqrt[3]{874} \times \sqrt{\dfrac{17}{39}}$

Respuesta: 0,800 20.

69º). $\sqrt[5]{\dfrac{623}{4{,}29}} \times \sqrt[3]{459}$

Respuesta: 1,319 68.

70º). $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}27} \times 9{,}1}{8{,}64}$

Respuesta: $\overline{1}{,}193\ 62$.

71º). $\dfrac{\sqrt{16{,}255 \times 0{,}27}}{49{,}03}$

Respuesta: $\overline{2}{,}630\ 72$.

72º). $\dfrac{\sqrt[4]{1\,928 \times 6\,664}}{0{,}943}$

Respuesta: 1,802 73.

73º). $\dfrac{36{,}59}{\sqrt{2\,297 \times 411}}$

Respuesta: $\overline{2}{,}575\ 86$.

74º). $\dfrac{2\,109}{\sqrt[3]{32{,}21 \times 85}}$

Respuesta: 2,178 28.

75º). $\dfrac{12{,}18}{\sqrt[5]{2{,}922 \times 2\,527}}$

Respuesta: 0,311 99.

76º). $\dfrac{4{,}283^2}{\sqrt{7\,954 \times 0{,}808}}$

Respuesta: $\overline{1}{,}360\ 50$.

77º). $\dfrac{21{,}41^3 \times 0{,}12}{\sqrt{5\,388}}$

Respuesta: 1,205 33.

78º). $\dfrac{\sqrt[3]{1\,596}}{8{,}5^2 \times 39}$

Respuesta: $\overline{3}{,}617\ 78$.

79º). $\dfrac{48{,}45 \times \sqrt[3]{60}}{59^2}$

Respuesta: $\overline{2}{,}736\ 31$.

80º). $\dfrac{\sqrt{2\,992} \times 334}{15{,}51}$

Respuesta: 3,071 12.

81º). $\dfrac{16{,}003 \times 0{,}41^{2}}{\sqrt{9\,864}}$

Respuesta: $\overline{2},432\,74$.

82º). $\dfrac{\sqrt[3]{6\,895} \times 24{,}97}{\sqrt{2\,512}}$

Respuesta: $0{,}976\,92$.

83º). $\dfrac{0{,}356 \times \sqrt[4]{518}}{\sqrt[3]{0{,}029}}$

Respuesta: $0{,}742\,56$.

84º). $\dfrac{\sqrt{0{,}111} \times 87{,}9^{5}}{63 \times 1\,356}$

Respuesta: $4{,}311\,01$.

85º). $\dfrac{\sqrt{525} \times 21}{0{,}089 \times \sqrt[3]{46{,}178}}$

Respuesta: $3{,}178\,10$

86º). $\dfrac{4{,}7^{5}}{0{,}54^{3} \times \sqrt{0{,}17}}$

Respuesta: $4{,}549\,11$.

87º). $\dfrac{\sqrt{91} \times \sqrt[3]{8{,}3}}{\sqrt[4]{0{,}098}}$

Respuesta: $1{,}538\,07$.

88º). $\sqrt{1{,}5} \times \sqrt[6]{\dfrac{0{,}242}{27\,106}}$

Respuesta: $\overline{2},404\,97$.

89º). $\sqrt{\dfrac{428}{319}} \times \sqrt[3]{511}$

Respuesta: $0{,}966\,64$.

90º). $\sqrt{0{,}23} \times \left(\dfrac{1{,}94 \times 38}{17}\right)^{2}$

Respuesta: $0{,}955\,13$.

91º). $\sqrt[4]{0{,}257} \times \left(\dfrac{10{,}42 \times 1{,}23}{49}\right)^{3}$

Respuesta: $\overline{2},105\,22$.

92º). $\dfrac{3{,}45^{2} \times \sqrt[3]{23{,}81}}{0{,}7 \times 593^{\frac{3}{2}}}$

Respuesta: $3{,}529\,80$.

93º). $\dfrac{\sqrt{2{,}41} \times 21{,}5^{-3}}{424^{-2} \times \sqrt[3]{18}}$

Respuesta: $1{,}030\,01$.

94º). $\dfrac{4{,}5^{-5} \times \sqrt{79{,}49} \times 86}{23{,}75^{-2} \times 0{,}11}$

Respuesta: $3{,}328\,54$.

95º). $\left(\dfrac{153{,}95^{-3} \times 3{,}57}{128^{-2} \times \sqrt{901}}\right)^{2}$

Respuesta: $\overline{7},455\,18$.

96º). $\left(\dfrac{\sqrt{421} \times 0{,}42^{-3}}{18{,}42^{3}}\right)^{3}$

Respuesta: $\overline{5},939\,56$.

97°). $\left(\dfrac{26{,}11^2 \times \sqrt[3]{426}}{\sqrt{1\,642}}\right)^2$ Respuesta: 4,204 82.

98°). $\dfrac{\sqrt[3]{8{,}56 \times 322^2}}{17{,}16^3}$ Respuesta: $\overline{2}$,279 17.

99°). $\dfrac{\sqrt{0{,}956} \times 8{,}12^2}{\sqrt[4]{145{,}39 \times 0{,}9}}$ Respuesta: 1,280 16.

100°). $\dfrac{\sqrt[4]{27{,}2^2 \times 15}}{2{,}8^3 \times \sqrt{12{,}26}}$ Respuesta: $\overline{1}$,125 59.

101°). $\sqrt[3]{\dfrac{499^3 \times 0{,}843^{\frac{2}{3}}}{426^{\frac{1}{2}}}}$ Respuesta: 2,243 39.

102°). $\sqrt{\dfrac{26{,}3^2 \times 1{,}2^5}{51{,}80^2}}$ Respuesta: $\overline{1}$,903 58.

103°). $\sqrt{\dfrac{35{,}64 \times 0{,}125^3 \times 5}{13{,}543^{\frac{1}{2}}}}$ Respuesta: $\overline{1}$,487 89.

104°). $\sqrt[3]{\dfrac{5{,}932 \times 14{,}01^3}{0{,}8 \times \sqrt{97{,}65}}}$ Respuesta: 1,104 87.

105°). $\sqrt{\dfrac{\sqrt{0{,}23} \times 8{,}57^2}{42^{\frac{1}{2}} \times 0{,}815}}$ Respuesta: 0,274 68.

106°). $\sqrt{\dfrac{1\,598^3 \times 0{,}195\,6^2}{\sqrt[3]{0{,}345\,91} \times \sqrt{156{,}30}}}$ Respuesta: 2,078 28.

107°). $\left(\dfrac{915{,}3^2 \times \sqrt{1{,}25}}{\sqrt[3]{83} \times 9{,}8^3}\right)^2$ Respuesta: 4,716 40.

108°). $\left[\dfrac{0{,}59\,\sqrt[8]{0{,}87}}{(2{,}5 + 48)^2}\right]^2$ Respuesta: $\overline{8}$,688 22.

Calcular, mediante logaritmos, el valor de las expresiones de los ejercicios comprendidos entre los números 1 a 108.

Capítulo IV.

PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

1. **Definiciones:** Dados tres o más números en un determinado orden se dice que forman *progresión aritmética*, si cada uno de ellos se obtiene sumándole un número constante al anterior. El número constante se llama *razón* de la progresión.

Si bien a esta constante correspondería el nombre de diferencia de acuerdo con el papel que desempeña, la costumbre ha impuesto el nombre de razón por analogía con otras progresiones que estudiaremos luego.

Ejemplo 1º:

La sucesión

$$2 \; ; \; 5 \; ; \; 8 \; ; \; 11 \; ; \; 14 \; ; \; 17 \; ; \; 20$$

constituye una progresión aritmética de razón 3, pues cada número se obtiene sumándole la constante 3 al anterior.

En efecto:

$$5 = 2 + 3 \quad ; \quad 8 = 5 + 3 \quad ; \quad 11 = 8 + 3 \quad ; \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 2º:

La sucesión

$$4 \; ; \; 2 \; ; \; 0 \; ; \; -2 \; ; \; -4 \; ; \; -6$$

es también progresión aritmética, de razón -2; pues cada número se obtiene agregando al anterior la constante -2.

En efecto:

$$2 = 4 - 2 \quad ; \quad 0 = 2 - 2 \quad ; \quad -2 = 0 - 2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

EJEMPLO 3º:

La sucesión:

$$2a \; ; \; \frac{7}{3}\, a \; ; \; \frac{8}{3}\, a \; ; \; 3a \; ; \; \frac{10}{3}\, a$$

constituye una progresión aritmética de razón $\frac{1}{3}$ a

.

En efecto:

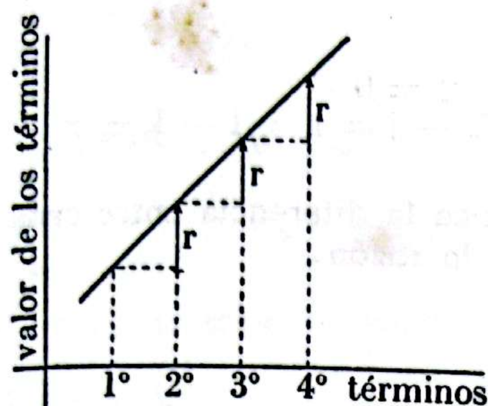
$$\frac{7}{3}\, a = 2\, a + \frac{1}{3} a \; ; \; \frac{8}{3}\, a = \frac{7}{3} a + \frac{1}{3}\, a \; ;$$

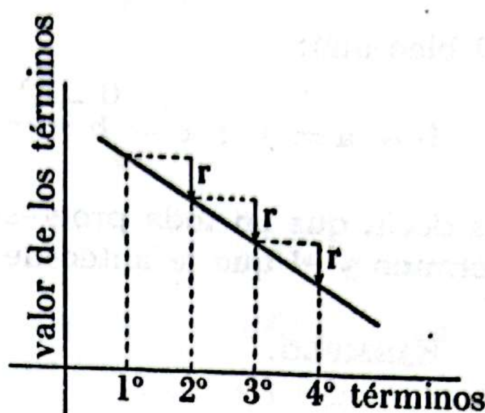
$$3\, a = \frac{8}{3}\, a + \frac{1}{3}\, a \; ; \; \frac{10}{3}\, a = 3\, a + \frac{1}{3}\, a \; ; \; \text{etc.}$$

Cada uno de los números que constituyen la progresión se llama *término de la progresión*.

Obsérvese que, cuando la razón es positiva, los términos van siendo cada vez mayores, y, cuando la razón es negativa, los términos van siendo cada vez menores. Así gráficamente se tiene que:

La representación gráfica de una progresión aritmética de razón positiva son los puntos de una recta ascendente.





La representación gráfica de una progresión aritmética de razón negativa son los puntos de una recta descendente.

Puede ocurrir que la progresión tenga un número infinito de términos o bien que tenga un número finito de términos. Una progresión aritmética de infinitos términos se representa por la siguiente notación:

$$\div \; \ldots\ldots\ldots \; f \; ; \; g \; ; \; h \; ; \; i \; ; \; j \; ; \; \ldots\ldots\ldots$$

donde el signo $\div$ es el símbolo de progresión aritmética, y los puntos suspensivos expresan que existen infinitos términos antes de f e infinitos términos después de j.

En una progresión aritmética de un número finito de términos, el primer término se representa, en general, por la letra a; el último por l; el número de términos, por n, y la razón, por r. Es decir, simbólicamente:

$$\div \; \overbrace{a \; ; \; b \; ; \; c \; ; \; d \; ; \; \ldots \; ; \; j \; ; \; k \; ; \; l}^{n}$$

y, de acuerdo con la definición, debe verificarse que:

$$b = a + r \; ; \; c = b + r \; ; \; \ldots \; ; \; k = j + r \; ; \; l = k + r$$

o bien, lo que es equivalente:

$$a = b - r \; ; \; b = c - r \; ; \; \ldots \; ; \; j = k - r \; ; \; k = l - r$$

es decir, que en toda progresión aritmética cada término es igual al que le sigue menos la razón.

O bien aún:

$$b - a = r \; ; \; c - b = r \; ; \; \dots \; ; \; k - j = r \; ; \; l - k = r$$

es decir, que en toda progresión aritmética la diferencia entre cada término y el que le antecede es igual a la razón.

Ejemplo:

$$\div\, 3 \; ; \; \frac{7}{2} \; ; \; 4 \; ; \; \frac{9}{2} \; ; \; 5 \; ; \; \frac{11}{2} \; ; \; 6 \; ; \; \frac{13}{2} \, ,$$

es una progresión aritmética de un número finito de términos, donde

el *primer término* es: $a = 3$

el *último término* es: $l = \frac{13}{2}$

la *razón* es: $r = \frac{1}{2}$

y el *número de términos* es: $n = 8$

2. Fórmula del enésimo término. — Conocidos el primer término de una progresión aritmética de un número finito de términos, la razón y el número de términos, calculando sucesivamente, de acuerdo con la definición, el segundo término, el tercero, etc., se puede llegar a obtener el último término de esa progresión. Pero, cuando el número de términos es grande, el cálculo se hace sumamente largo; entonces conviene establecer una fórmula que dé directamente el último término en función del primero, la razón y el número de términos.

Teorema: *El último término de una progresión aritmética es igual al primer término, más el producto de la razón, por el número de términos menos uno.*

$$\text{H)} \quad \div \overbrace{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ \ldots\ ;\ i\ ;\ k\ ;\ l}^{n}$$

$$\text{T)} \quad l = a + r\,(n-1)$$

Demostración. Como, por hipótesis:

$$a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ \ldots\ ;\ j\ ;\ k\ ;\ l$$

es una progresión aritmética de n términos, debe verificarse que:

$$\left.\begin{array}{l} b - a = r \\ c - b = r \\ d - c = r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k - j = r \\ l - k = r \end{array}\right\} (n-1)$$

Son $(n-1)$ igualdades, pues éstas comienzan a formarse a partir del segundo término y, si en total son n términos, a partir del segundo son $(n-1)$.

Sumando miembro a miembro las $(n-1)$ igualdades, se tiene:

$$(b-a) + (c-b) + (d-c) + \ldots + (k-j) + (l-k) =$$

$$= \overbrace{r + r + \ldots + r}^{n-1}$$

Pero en el primer miembro, se reducen el minuendo de cada paréntesis con el sustraendo del siguiente, quedando entonces únicamente el sustraendo $-a$ del primer paréntesis y el minuendo l del último, es decir :

$$-a + l = \overbrace{r + r + \ldots r + r}^{n-1} \qquad [1]$$

Como $\quad \overbrace{r + r + \ldots + r}^{n-1} = r\,(n-1)$

sustituyendo en [1], se tiene:

$$- a + l = r (n - 1)$$

y pasando a al segundo miembro, resulta:

$$l = r (n - 1) + a$$

o sea:

$$\boxed{l = a + r (n - 1)}$$

que es la tesis.

3. Fórmulas del primer término, de la razón y del número de términos. — Estas fórmulas se deducen de la del último término. En efecto:

FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO.

Siendo $l = a + r (n - 1)$

pasando $r (n - 1)$ al primer miembro, se tiene:

$$l - r (n - 1) = a$$

o sea:

$$\boxed{a = l - r (n - 1)}$$

que expresa: *El primer término de una progresión aritmética es igual al último, menos el producto de la razón, por el número de términos menos uno.*

FÓRMULA DE LA RAZÓN.

Siendo: $l = a + r (n - 1)$

trasponiendo a, se tiene: $l - a = r (n - 1)$

y pasando el factor (n — 1) al 1er. miembro, resulta:

$$\frac{l - a}{n - 1} = r$$

o sea:

$$\boxed{r = \frac{l - a}{n - 1}}$$

que expresa: *La razón de una progresión aritmética es igual a la diferencia del último término menos el primero, dividida por el número de términos menos uno.*

FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS.

Siendo: $l = a + r\,(n - 1)$

es: $l - a = r\,(n - 1)$

y: $\frac{l - a}{r} = n - 1$

de donde: $\frac{l - a}{r} + 1 = n$

o sea:

$$\boxed{n = \frac{l - a}{r} + 1}$$

que expresa: *El número de términos de una progresión aritmética es igual al cociente de la diferencia del último término menos el primero dividida por la razón, más uno.*

APLICACIONES.

1º En una progresión aritmética de seis términos y de razón $-\frac{1}{2}$ el primer término es 1. ¿Cuál es el último término?

Aplicamos la fórmula:

$$l = a + r(n - 1)$$

Como: $a = 1$; $r = -\frac{1}{2}$ y $n = 6$

reemplazando, se tiene $l = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(6 - 1)$

o sea: $l = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)5$

$$l = 1 - \frac{5}{2}$$

$$l = -\frac{3}{2}$$

2º En una progresión aritmética de once términos, los dos últimos son ordenadamente $-\frac{3}{7}$ y 1. ¿Cuál es el primer término?

Aplicamos la fórmula:

$$a = l - r(n - 1) \qquad [1]$$

Sabemos que:

$$l = 1 .$$

En este problema no se da la razón, pero, como se conocen los dos últimos términos, que son consecutivos, la razón puede calcularse fácilmente como diferencia de los mismos, es decir:

$$r = 1 - \left(-\frac{3}{7}\right) = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

Además:

$$n = 11$$

Luego, reemplazando en [1], se tiene:

$$a = 1 - \frac{10}{7}(11 - 1)$$

$$a = 1 - \frac{10}{7} \times 10$$

$$a = 1 - \frac{100}{7}$$

$$a = -\frac{93}{7}$$

3º El primero y último términos de una progresión aritmética de cinco términos son respectivamente 0,1 y $-\frac{3}{4}$. Calcular la razón.

Aplicamos la fórmula:

$$r = \frac{1 - a}{n - 1}$$

Como:

$$1 = -\frac{3}{4} \quad ; \quad a = 0{,}1 \quad ; \quad n = 5$$

es

$$r = \frac{-\frac{3}{4} - 0{,}1}{5 - 1} = \frac{-0{,}75 - 0{,}1}{4} = -\frac{0{,}85}{4}$$

$$r = -0{,}212\,5$$

4º ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética de razón $\frac{2}{5}$, sabiendo que el segundo término es 0 y el último $\frac{18}{5}$?

Aplicamos la fórmula:

$$n = \frac{1 - a}{r} + 1 \qquad [1]$$

No se conoce el primer término, pero puede calcularse fácilmente, dado el segundo y la razón, como diferencia de éstos, es decir:

$$a = 0 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$

y como: $1 = \frac{18}{5} \quad ; \quad r = \frac{2}{5}$

Reemplazando en [1], se tiene:

$$n = \frac{\frac{18}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}} + 1$$

$$n = \frac{\frac{18}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} + 1$$

$$n = \frac{\frac{20}{5}}{\frac{2}{5}} + 1 = 10 + 1$$

$$\therefore \quad n = 11$$

4. INTERPOLACIÓN. Dados dos términos de una progresión aritmética, interpolar los términos comprendidos entre ellos significa calcular los términos que se encuentran entre los dos términos dados.

Para ello es necesario conocer la razón, y por sumas sucesivas se calculan los términos que hay que interpolar.

EJEMPLO:

Interpolar cinco términos entre 8 y 20.

Para calcular la razón, consideremos que los dos términos dados y los cinco que hay que interpolar entre esos dos forman una progresión aritmética de siete términos, en que el primero es 8 y el último 20.

Luego, la razón es:

$$r = \frac{1 - a}{n - 1} = \frac{20 - 8}{7 - 1} = \frac{12}{6} = 2$$

Por lo tanto:

El 1er. término a interpolar es $8 + 2 = 10$
El 2º término a interpolar es $10 + 2 = 12$
El 3er. término a interpolar es $12 + 2 = 14$
El 4º término a interpolar es $14 + 2 = 16$
El 5º término a interpolar es $16 + 2 = 18$.

Luego, se tiene la progresión aritmética:

$$\ldots\ldots;\ 8;\ \underbrace{10;\ 12;\ 14;\ 16;\ 18}_{\text{términos interpolados}};\ 20;\ \ldots\ldots$$

5. **Suma de dos términos equidistantes de los extremos en una progresión aritmética finita.**

Sea la siguiente progresión aritmética:

$$\div\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16\,.$$

En esta progresión el primer y el último términos, vale decir los extremos, son 2 y 16; el segundo término y el penúltimo, o sea 4 y 14, se dicen equidistantes de los extremos; también se llaman así el tercero y el antepenúltimo o sea, 6 y 12, etc., es decir, son términos equidistantes de los extremos, los pares de términos tales que el número de términos comprendidos entre uno de ellos y el primero sea igual al número de términos comprendidos entre el otro y el último. Así, son también términos equidistantes de los extremos en la progresión anterior, 8 y 10.

Calculemos la suma de cada par de términos equidistantes de los extremos en la progresión anterior, es decir:

$$2 + 16 = 18$$

y $$4 + 14 = 18$$

y $$6 + 12 = 18$$

y $$8 + 10 = 18 .$$

Vemos que la suma de cada par de términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Esta observación es general para cualquier progresión aritmética finita y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA. *En una progresión aritmética finita la suma de cada par de términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los términos extremos.*

H) $\div\ a;\ b;\ c;\ d;\ \dots\ ;\ i;\ j;\ k;\ l,$ de razón r.

T) $b + k = c + j = \dots = a + l$

Demostración.

Según hemos visto es por definición de progresión aritmética

$$b = a + r$$

y $$k = l - r$$

Sumando m. a m.: $$b + k = a + r + l - r$$

y reduciendo términos en el segundo miembro:

$$b + k = a + l \qquad [1]$$

También es por definición de progresión aritmética

$$c = b + r$$

$$\text{y} \qquad j = k - r$$

$$\text{sumando m. a m.:} \qquad c + j = b + r + k - r$$

y reduciendo términos en el segundo miembro:

$$c + j = b + k \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta:

$$b + k = c + j = a + l$$

El mismo razonamiento aplicado a los demás pares de términos equidistantes de los extremos lleva a demostrar que:

$$b + k = c + j = d + i = \dots = a + l$$

que es la tesis.

6. Suma de los n términos de una progresión aritmética finita.

Teorema. *La suma de los n términos de una progresión aritmética finita es igual a la semisuma de los términos extremos, por el número de términos.*

H) $\div\ a;\ b;\ c;\ d;\ \dots\ ;\ j;\ k;\ l.$

$S = a + b + c + d + \dots + j + k + l.$

T) $S = \dfrac{(a + l)}{2}\, n$

Demostración.

Siendo: $$S = \overbrace{a + b + c + \ldots + j + k + l}^{n}$$

es también, por propiedad conmutativa de la suma:

$$S = \overbrace{l + k + j + \ldots + c + b + a}^{n}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, y por columnas en el segundo miembro, se tiene:

$$S + S = \overbrace{(a+l)+(b+k)+(c+j)+\ldots+(j+c)+(k+b)+(l+a)}^{n \text{ paréntesis}}$$

Cada uno de los n paréntesis del segundo miembro es la suma de dos términos equidistantes de los extremos; luego, por el teorema anterior, cada una de esas sumas es igual a la suma de los extremos, es decir:

$$S + S = \overbrace{(a+l) + (a+l) + \ldots + (a+l)}^{n \text{ paréntesis}}$$

o sea: $$S + S = (a + l)\; n$$

luego: $$2\; S = (a + l)\; n\,.$$

Pasando el factor 2 al segundo miembro, como divisor, resulta:

$$\boxed{S = \frac{(a + l)}{2}\; n}$$

que es la tesis.

APLICACIONES.

1º Calcular la suma de los doce términos de una progresión aritmética cuyos dos primeros términos son ordenadamente 3 y 2,8.

Aplicamos la fórmula obtenida, que nos da la suma de los términos de una progresión aritmética:

$$S = \frac{(a + l)}{2} n \qquad [1]$$

Sabemos que: $a = 3$; $n = 12$

Por lo tanto, es necesario calcular previamente l, para lo cual necesitamos conocer la razón.

Ésta es: $r = 2{,}8 - 3 = -0{,}2$

Luego : $l = a + r(n - 1) = 3 + (-0{,}2)(12 - 1) =$

$$= 3 - 0{,}2 \times 11 = 3 - 2{,}2 = 0{,}8$$

Reemplazando en [1], se tiene:

$$S = \frac{(3 + 0{,}8)}{2} \times 12$$

$$S = \frac{3{,}8}{2} \times 12$$

$$S = 22{,}8$$

2º Hallar la suma de los siete primeros términos de una progresión aritmética infinita de razón $\frac{1}{3}$ cuyo primer término es 2.

El problema se reduce a calcular la suma de los términos de la progresión aritmética de siete términos cuyo primer término es 2 y su razón $\frac{1}{3}$.

Siendo: $a = 2$; $n = 7$; $r = \frac{1}{3}$

y: $l = a + r(n - 1) = 2 + \frac{1}{3}(7 - 1) =$

$$= 2 + \frac{1}{3} \times 6 = 2 + 2$$

$\therefore \quad l = 4.$

Aplicando la fórmula:

$$S = \frac{(a + l)}{2} n$$

$$S = \frac{(2 + 4)}{2} \times 7 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$\therefore \quad S = 21 .$$

3º Calcular la suma de los cinco últimos términos de una progresión aritmética de doce términos cuyo primer término es -3, y la razón, 4.

Los cinco últimos términos cuya suma deberemos calcular constituyen una progresión parcial donde los extremos son: a' igual al octavo término de la progresión total, es decir

$$a' = -3 + 4(8 - 1) = -3 + 28 = 25$$

y l, último término de la progresión total, es decir:

$$l = -3 + 4(12 - 1) = -3 + 44 = 41 .$$

Resolvemos el problema, aplicando la fórmula: $S = \frac{(a' + l)}{2} n$, donde, como se sabe: $a' = 25$; $l = 41$; $n = 5$

luego:

$$S = \frac{25 + 41}{2} \times 5$$

o sea

$$S = 165 .$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Escribir los seis primeros términos de una progresión aritmética tal que:

1º). $a = 2$, $r = -3$ 2º). $a = -10$, $r = 4$ 3º). $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$

4º). $a = 2$, $r = \frac{2}{3}$ 5º). $a = 5$, $r = -0{,}2$ 6º). $a = -1{,}5$, $r = -0{,}1$

7º). $a = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{4}$ 8º). $a = -\frac{5}{2}$, $r = \frac{3}{4}$

9º). $a = -\sqrt{3}$, $r = 2\sqrt{3}$ 10º). $a = 4n$, $r = -\frac{1}{2}n$

Calcular la razón de la progresión aritmética tal que dos términos consecutivos son ordenadamente:

1º). $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ 2º). -2 , 3 3º). -4 , $-3{,}5$

4º). 1 , $-\frac{3}{2}$ 5º). $\frac{3}{4}$, 1 6º). 2 , $-0{,}2$

7º). $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ 8º). $5\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ 9º). $-7x$, $-4x$

10º). El tercer término de una progresión aritmética es $\frac{7}{6}$ y el sexto $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la razón?

Resolver el mismo problema anterior, si:

11º). El 5º término es $-\frac{4}{5}$ y el 9º es $\frac{4}{5}$.

12º). El 4º término es $\sqrt{6}$ y el 6º es $5\sqrt{6}$.

13º). El cuarto término de una progresión aritmética es $-0{,}25$, y la razón $-\frac{1}{4}$. Escribir los tres primeros de la progresión.

14º). El sexto término de una progresión aritmética de razón 0,1 es $\frac{2}{5}$; calcular el octavo y el décimo términos de la misma.

Interpolar:

1º). Tres términos entre -5 y 3.

2º). Cinco términos entre 1 y -2.

3º). Seis términos entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{2}$.

4º). Cuatro términos entre 2 y $\frac{1}{5}$.

Calcular el último término en cada una de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} a = 1 \\ r = 3 \\ n = 13 \\ l = x \end{cases}$

2º). $\begin{cases} a = -5 \\ r = 2 \\ n = 21 \\ l = x \end{cases}$

3º). $\begin{cases} a = -7 \\ r = -4 \\ n = 10 \\ l = x \end{cases}$

4º). $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ r = 1 \\ n = 26 \\ l = x \end{cases}$

5º). $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ r = \frac{5}{6} \\ n = 23 \\ l = x \end{cases}$

6º). $\begin{cases} a = 1 \\ r = \frac{3}{4} \\ n = 15 \\ l = x \end{cases}$

7º). $\begin{cases} a = -2 \\ r = -\frac{2}{5} \\ n = 11 \\ l = x \end{cases}$

8º). $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ r = -\frac{2}{3} \\ n = 25 \\ l = x \end{cases}$

9º). $\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ r = -\frac{1}{6} \\ n = 41 \\ l = x \end{cases}$

10º). $\begin{cases} a = -1{,}2 \\ r = -0{,}7 \\ n = 5 \\ l = x \end{cases}$

11º). $\begin{cases} a = -1{,}4 \\ r = -1{,}2 \\ n = 12 \\ l = x \end{cases}$

12º). $\begin{cases} a = 1 \\ r = 0{,}3 \\ n = 16 \\ l = x \end{cases}$

13º). $\begin{cases} a = -2\,m \\ r = \frac{1}{3}\,m \\ n = 7 \\ l = x \end{cases}$

14º). $\begin{cases} a = -\sqrt{7} \\ r = 0{,}2\sqrt{7} \\ n = 31 \\ l = x \end{cases}$

15º). $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ r = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ n = 27 \\ l = x \end{cases}$

Calcular el primer término de cada una de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} l = 25 \\ r = 3 \\ n = 9 \\ a = x \end{cases}$

2º). $\begin{cases} l = 9 \\ r = -2 \\ n = 52 \\ a = x \end{cases}$

3º). $\begin{cases} l = \frac{3}{2} \\ r = -1 \\ n = 45 \\ a = x \end{cases}$

4º). $\begin{cases} l = -\frac{13}{5} \\ r = -0{,}2 \\ n = 16 \\ a = x \end{cases}$

5º). $\begin{cases} l = 0 \\ r = -\frac{9}{2} \\ n = 23 \\ a = x \end{cases}$

6º). $\begin{cases} l = 14 \\ r = -0{,}4 \\ n = 31 \\ a = x \end{cases}$

7º). $\begin{cases} l = -5 \\ r = \frac{5}{6} \\ n = 34 \\ a = x \end{cases}$

8º). $\begin{cases} l = -\frac{1}{2} \\ r = -\frac{5}{8} \\ n = 17 \\ a = x \end{cases}$

9º). $\begin{cases} l = -\frac{10}{7} \\ r = \frac{1}{4} \\ n = 41 \\ a = x \end{cases}$

10º). $\begin{cases} l = -b \\ r = 0{,}7\,b \\ n = 46 \\ a = x \end{cases}$

11º). $\begin{cases} l = 6\,m \\ r = \frac{2}{3}\,m \\ n = 11 \\ a = x \end{cases}$

12º). $\begin{cases} l = \sqrt{x} \\ r = -2\sqrt{x} \\ n = 57 \\ a = x \end{cases}$

Calcular la razón de cada una de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} a = 3 \\ l = 15 \\ n = 13 \\ r = x \end{cases}$

2º). $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ l = 10 \\ n = 35 \\ r = x \end{cases}$

3º). $\begin{cases} a = \frac{7}{8} \\ l = \frac{7}{4} \\ n = 15 \\ r = x \end{cases}$

4º). $\begin{cases} a = -5 \\ l = 27 \\ n = 17 \\ r = x \end{cases}$

5º). $\begin{cases} a = -0{,}2 \\ l = 44 \\ n = 10 \\ r = x \end{cases}$

6º). $\begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ l = 11 \\ n = 8 \\ r = x \end{cases}$

7º). $\begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ l = \frac{9}{16} \\ n = 31 \\ r = x \end{cases}$ 8º). $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ l = -\frac{27}{6} \\ n = 7 \\ r = x \end{cases}$ 9º). $\begin{cases} a = 3n \\ l = -\frac{19}{4}n \\ n = 22 \\ r = x \end{cases}$

10º). $\begin{cases} a = 1{,}8 \\ l = 14{,}2 \\ n = 10 \\ r = x \end{cases}$ 11º). $\begin{cases} a = 0{,}1 \\ l = -27{,}4 \\ n = 14 \\ r = x \end{cases}$ 12º). $\begin{cases} a = \frac{16}{5} \\ l = 66{,}2 \\ n = 31 \\ r = x \end{cases}$

Calcular el número de términos de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} a = 5 \\ l = 37 \\ r = 4 \\ n = x \end{cases}$ 2º). $\begin{cases} a = 10 \\ l = 28 \\ r = \frac{1}{2} \\ n = x \end{cases}$ 3º). $\begin{cases} a = -2 \\ l = 25 \\ r = \frac{3}{4} \\ n = x \end{cases}$

4º). $\begin{cases} a = -1 \\ l = 4 \\ r = \frac{5}{3} \\ n = x \end{cases}$ 5º). $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ l = 25 \\ r = \frac{1}{4} \\ n = x \end{cases}$ 6º). $\begin{cases} a = 3 \\ l = \frac{3}{2} \\ r = -\frac{3}{2} \\ n = x \end{cases}$

7º). $\begin{cases} a = -\frac{3}{5} \\ l = -\frac{21}{10} \\ r = -0{,}1 \\ n = x \end{cases}$ 8º). $\begin{cases} a = 2 \\ l = -\frac{35}{2} \\ r = -\frac{1}{8} \\ n = x \end{cases}$ 9º). $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ l = -9 \\ r = -\frac{5}{6} \\ n = x \end{cases}$

10º). $\begin{cases} a = -0{,}5 \\ l = -20{,}8 \\ r = -0{,}7 \\ n = x \end{cases}$ 11º). $\begin{cases} a = 6\,m \\ l = -60\,m \\ r = -1{,}1\,m \\ n = x \end{cases}$ 12º). $\begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ l = \frac{25}{2}\sqrt{3} \\ r = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ n = x \end{cases}$

Calcular la suma de los términos de cada una de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} a = 3 \\ l = 101 \\ n = 10 \\ S = x \end{cases}$ 2º). $\begin{cases} a = -1 \\ l = -45 \\ n = 13 \\ S = x \end{cases}$ 3º). $\begin{cases} a = 5 \\ l = -31 \\ n = 15 \\ S = x \end{cases}$

4º). $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ l = \frac{11}{3} \\ n = 18 \\ S = x \end{cases}$ 5º). $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ l = 6 \\ n = 20 \\ S = x \end{cases}$ 6º). $\begin{cases} a = y \\ l = -\frac{7}{3}y \\ n = 21 \\ S = x \end{cases}$

7º). $\begin{cases} a = -2 \\ r = 5 \\ n = 17 \\ S = x \end{cases}$ 8º). $\begin{cases} a = 3 \\ r = -\frac{1}{2} \\ n = 31 \\ S = x \end{cases}$ 9º). $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ r = \frac{3}{4} \\ l = \frac{138}{3} \\ S = x \end{cases}$

Calcular el primero y el último término de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ n = 24 \\ S = 252\sqrt{2} \\ a = x \\ l = y \end{cases}$ 2º). $\begin{cases} r = -0{,}3 \\ n = 37 \\ S = -222 \\ a = x \\ l = y \end{cases}$ 3º). $\begin{cases} r = -\frac{1}{8} \\ n = 41 \\ S = -82 \\ a = x \\ l = y \end{cases}$

Calcular el primer término y la razón de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} l = 2\sqrt{5} - 2 \\ n = 13 \\ S = 26(\sqrt{5} - 1) \\ a = x \\ r = y \end{cases}$ 2º). $\begin{cases} l = 0{,}1 \\ n = 27 \\ S = -14{,}85 \\ a = x \\ r = y \end{cases}$ 3º). $\begin{cases} l = -\frac{7}{2} \\ n = 99 \\ S = 0 \\ a = x \\ r = y \end{cases}$

Calcular el último término y la razón de las progresiones aritméticas cuyos datos se dan a continuación:

1º). $\begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ n = 51 \\ S = -105\,4 \\ l = x \\ r = y \end{cases}$ 2º). $\begin{cases} a = 0{,}5 \\ n = 60 \\ S = -2\,625 \\ l = x \\ r = y \end{cases}$ 3º). $\begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ n = 10 \\ S = 80\sqrt{3} \\ l = x \\ r = y \end{cases}$

1º). Calcular el vigésimo término de la progresión aritmética cuyos dos primeros términos son ordenadamente $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{2}$.

2º). Calcular el sexto término de la progresión aritmética cuyos dos primeros términos son ordenadamente 360 y -320.

3º). Calcular el décimo término de la progresión aritmética que tiene por segundo y cuarto términos, respectivamente, $\frac{2}{5}$ y 1.

4º). Calcular la suma de los 12 términos de una progresión aritmética tal que tiene por primero y cuarto términos, respectivamente, $\frac{3}{4}$ y 0.

5º). En una progresión aritmética, el quinto término es -4, y el décimo, $-\frac{3}{2}$. Calcular la suma de los 16 términos de dicha progresión.

6º). Calcular la suma de los 30 primeros números naturales.

7º). Calcular la suma de los 20 primeros números naturales impares.

8º). Calcular la suma de los números naturales pares comprendidos entre 5 y 43.

9º). ¿Cuántos números enteros, múltiplos de 3, existen entre 8 y 31?

10º). ¿Cuántos números enteros, múltiplos de 7, existen entre 11 y 173?

11º). ¿Cuántos términos deben tomarse en la progresión $\div -5 ; -2 ; \ldots$ para que su suma sea 28?

12º). ¿Cuántos términos deben tomarse en la progresión $\div 1 ; \frac{1}{2} \ldots$ para que la suma de los mismos sea igual a 39?

13º). Un reloj marca solamente las horas, con el número de campanadas correspondiente. ¿Cuántas campanadas da, en total, entre las 2 h 15 min y las 11 h 20 min?

14º). Para una empalizada se utilizan 75 troncos, de los cuales el más bajo es de 90 cm, y los otros van siendo, sucesivamente, 10 cm más altos que el anterior. Expresar en metros la longitud total de troncos que se utilizan.

15º). En una progresión aritmética de 12 términos, el primero es 8, y la suma de todos los términos es -36. Calcular la razón.

16º). En una progresión aritmética, la suma de los extremos es 8, y la de los restantes términos, 20. Calcular el número de términos de dicha progresión.

17º). En una progresión aritmética de 12 términos, el último es 26, y la razón, 2. Calcular la suma de los términos de dicha progresión.

18º). Siendo, en una progresión aritmética, $l = 205{,}5$, $r = 8{,}50$ y $a = 10$, calcular la suma de todos los términos de dicha progresión.

19º). La suma de 5 términos consecutivos en una progresión aritmética es 30; y la suma de sus cuadrados 318. ¿Cuáles son los números?

Respuesta: 7; 10; 13.

20º). En una progresión aritmética la suma del 2º término más el 6º es 10 y la suma del 4º término más el 10º es igual a 13. Calcular el valor de los cuatro términos.

Respuesta: 2º término: 4; 4º término: 5; 6º término: 6; 10º término: 8.

ANUALIDADES: IMPOSICIONES Y AMORTIZACIONES A INTERÉS SIMPLE.

Se llama anualidad a una suma constante de dinero que se abona cada período fijo (generalmente 1 año) con el objeto de reunir un capital o pagar una deuda.

En el primer caso, las anualidades se llaman *imposiciones* y en el segundo *amortizaciones*.

Las anualidades pueden abonarse al comenzar o al finalizar cada período, llamándose *anualidades adelantadas* las primeras, y *anualidades vencidas* las segundas.

7. Imposiciones a interés simple. — Consideraremos únicamente las imposiciones que se pagan al comenzar cada período.

Designando con a la anualidad y con A el capital que se desea reunir con dichas anualidades colocadas a interés simple durante n períodos, es evidente que: la primera anualidad a, depositada al comenzar el primer período está colocada a interés simple durante n períodos. Por lo tanto, si se designa por i el tanto por uno, el interés simple que produce es:

$$I = a\,i\,n$$

y en consecuencia el monto A_1 a que da origen esta primera anualidad es: $A_1 = a + a\,i\,n$

o sea:

$$A_1 = a\,(1 + i\,n)$$

Obsérvese que n es el número de períodos que está depositada esta primera anualidad.

La segunda anualidad, que también es a, está colocada solamente durante $(n - 1)$ períodos, luego su monto A_2, se obtendrá reemplazando en la fórmula anterior el número n por $n - 1$, es decir:

$$A_2 = a[\,1 + i\,(n - 1)\,]$$

La tercera anualidad, a, está colocada durante $(n - 2)$ períodos; luego su monto A_3 es:

$$A_3 = a\,[\,1 + i\,(n - 2)\,]\,.$$

y así siguiendo, la penúltima anualidad está colocada durante 2 períodos; luego su monto A_{n-1} es:

$$A_{n-1} = a\,(1 + 2\,i)$$

y la última anualidad, solamente durante un período, luego su monto A_n es

$$A_n = a\ \ (1 + i)$$

Por lo tanto: el capital reunido A, o sea el monto total, es la suma de todos estos montos parciales, es decir:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n$$

Reemplazando A_1, A_2, etc., por los valores hallados, se tiene:

$$A = a\ [1 + in] + a\ [1 + i\,(n - 1)] + a\ [1 + i\,(n - 2)] +$$
$$+ \ldots + a\,(1 + 2\,i) + a\,(1 + i)\,.$$

Sacando a factor común, es:

$$A = a\,\{[1 + in] + [1 + i\,(n - 1)] + [1 + i\,(n - 2)] + \ldots + \\ + [1 + 2i] + [1 + i]\}\,.$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma, se puede invertir el orden de los términos de la suma encerrada en la llave, y queda:

$$A = a\,\{[1 + i] + [1 + 2i] + \ldots + [1 + i\,(n - 2)] + \\ + [1 + i\,(n - 1)] + [1 + in]\}\,.$$

donde figuran tantos corchetes como imposiciones, es decir n.

Suprimiendo dichos corchetes, se tiene:

$$A = a\,\{1 + i + 1 + 2i + \ldots + 1 + i\,(n - 2) + \\ + [1 + i\,(n - 1)] + [1 + in]\}\,.$$

Como cada uno de los términos 1 que aquí figuran provino de un corchete, resulta que hay n sumandos iguales a 1 y por lo tanto reemplazando dichos sumandos por su suma efectuada, n, se tiene:

$$A = a\,\{n + [i + 2i + \ldots + i\,(n - 2) + i\,(n - 1) + in]\} \quad [1]$$

donde hemos encerrado entre corchetes los términos que siguen a n para destacarlos, pues constituyen la suma de los n términos de una progresión aritmética de razón i, cuyo primer término es i y el último in.

Recordando que la suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los términos extremos, por el número de términos, se tiene:

$$\overbrace{i + 2i + \ldots + i\,(n - 2) + i\,(n - 1) + in}^{n} = \frac{i + in}{2} \cdot n = \\ = \frac{i\,(1 + n)}{2}\,n$$

Reemplazando en [1]:

$$A = a \left\{ n + \frac{i(1+n)}{2} n \right\}$$

y sacando n factor común, resulta:

$$A = a\, n \left[1 + \frac{i(1+n)}{2} \right]$$

o sea:

$$\boxed{A = a\, n \frac{2 + i(1+n)}{2}}$$

fórmula que permite calcular el capital A que se obtiene al depositar anualidades iguales a a durante n períodos y a interés simple de tanto por uno i.

EJEMPLO:

¿Qué capital se conseguirá reunir abonando a interés simple, anualidades de 500 \$ durante 12 años al 2 % anual?

Aplicando la fórmula anterior y teniendo en cuenta que en nuestro caso: $a = 500\ \$$, $n = 12$ e $i = 0{,}02$, resulta:

$$A = 500\ \$ \times 12 \times \frac{2 + 0{,}02\,(1 + 12)}{2}$$

$$A = 500\ \$ \times 12 \times \frac{2 + 0{,}02 \times 13}{2}$$

$$A = 500\ \$ \times 12 \times \frac{2 + 0{,}26}{2}$$

$$A = 500\ \$ \times 12 \times 1{,}13$$

$$A = 6\,780\ \$$$

Por lo tanto el capital reunido es de 6 780 \$.

8. Amortizaciones. — Se trata de establecer qué suma o anualidad a es necesario reembolsar periódicamente para cubrir un préstamo o capital adeudado C, impuesto a interés simple, al tanto por uno, i, en n períodos.

El capital adeudado C, colocado a interés simple en las condiciones enunciadas, produce un interés: $I = C\,in$ y por lo tanto se convierte en un monto: $M = C + C\,in$

o sea:

$$M = C(1 + in) \qquad [1]$$

Como las anualidades se abonan al terminar cada período, la primera anualidad o amortización a quedará impuesta durante $(n - 1)$ períodos y por lo tanto su interés es: $a\,i\,(n - 1)$ y en consecuencia se transforma en:

$$A_1 = a + a\,i\,(n - 1)$$

o sea:

$$A_1 = a\,[\,1 + i\,(n - 1)\,]\,.$$

La segunda anualidad queda impuesta durante $(n - 2)$ períodos, luego su monto A_2 es:

$$A_2 = a\,[\,1 + i\,(n - 2)\,]$$

y así siguiendo, se llegaría a establecer que:

$$A_3 = a\,[\,1 + i\,(n - 3)\,]$$

. . . .

. . . .

$$A_{n-1} = a\,(1 + i)$$

y finalmente, la última anualidad no produce interés, porque se paga al terminar los períodos impuestos; por consiguiente:

$$A_n = a\,.$$

La suma reembolsada es pues:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + An$$

o sea, reemplazando

$$A = a[1 + i(n-1)] + a[1 + i(n-2)] +$$
$$+ a[1 + i(n-3)] + \dots + a(1+i) + a$$

Sacando factor común a, se tiene:

$$A = a\{[1 + i(n-1)] + [1 + i(n-2)] +$$
$$+ [1 + i(n-3)] + \dots + [1+i] + 1\}.$$

Suprimiendo corchetes:

$$A = a\{1 + i(n-1) + 1 + i(n-2) + 1 + i(n-3) +$$
$$+ \dots + 1 + i + 1\}$$

donde hay n sumandos iguales a 1; luego, reemplazándolos por su suma efectuada, n, se obtiene:

$$A = a\{n + [i(n-1) + i(n-2) + i(n-3) + \dots + i]\} \quad [2]$$

Los términos encerrados en el corchete constituyen la suma de los $(n-1)$ términos de una progresión aritmética de razón $-i$ cuyo primer término es $i(n-1)$ y cuyo último término es i.

Luego su suma es:

$$i(n-1) + i(n-2) + i(n-3) + \dots + i = \frac{i(n-1)+i}{2}(n-1) =$$

$$= \frac{in - i + i}{2}(n-1) = \frac{in(n-1)}{2}$$

Luego, reemplazando en [2]:

$$A = a \left\{ n + \frac{in\,(n-1)}{2} \right\}$$

Sacando el factor común n

$$A = a\,n \left[1 + \frac{i\,(n-1)}{2} \right]$$

o sea:

$$A = a\,n \left[\frac{2 + i\,(n-1)}{2} \right] \qquad [3]$$

Pero este monto debe coincidir con el que corresponde al del capital prestado, establecido en la relación [1], es decir:

$$C\,(1 + in) = a\,n \left[\frac{2 + i\,(n-1)}{2} \right]$$

$$\therefore \qquad \frac{2\,C\,(1 + in)}{n\,[2 + i\,(n-1)]} = a$$

o sea:

$$\boxed{a = \frac{2\,C\,(1 + in)}{n\,[2 + i\,(n-1)]}}$$

fórmula que permite calcular la cantidad periódica a que se debe abonar para amortizar una deuda C, al tanto por uno, i, en n períodos.

Ejemplo:

Se han percibido, en calidad de préstamo, 25 000 $ que se deben saldar en 10 años al 5 % anual en períodos de 1 año. Calcular el valor de la amortización (amortización vencida).

Aplicando la fórmula anterior y teniendo en cuenta que en nuestro caso: $C = 25\,000\,\$$; $n = 10$ e $i = 0{,}05$, resulta:

$$a = \frac{2 \times 25\,00\not{0}\,\$\,(1 + 0{,}05 \times 10)}{\not{1}\not{0}\,[2 + 0{,}05\,(10 - 1)]}$$

$$a = \frac{2 \times 2\,500\,\$ \times 1{,}5}{2 + 0{,}45}$$

$$a = \frac{2 \times 2\,500\,\$ \times 1{,}5}{2{,}45}$$

$$a = 3\,061{,}22\,\$\,.$$

Luego, la suma que se debe abonar anualmente es de 3 061,22 $.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Calcular el capital que podrá reunirse abonando a interés simple:

1º) Anualidades de 2 000 $ durante 5 años, al 4 % anual.

Respuesta: 11 200 $.

2º) Anualidades de 7 500 $ durante 8 años, al 2,5 % anual.

Respuesta: 66 750 $.

3º) Anualidades de 5 000 $ durante 10 años, al 3 % anual.

Respuesta: 58 250 $.

4º) Anualidades de 1 500 $ durante 12 años, al 2 % anual.

Respuesta: 20 340 $.

5º) Anualidades de 1 000 $ durante 10 años, al 1,5 % anual.

Respuesta: 10 825 $.

6º) Anualidades de 3 000 $ durante 15 años, al 3 % anual.

Respuesta: 55 800 $.

Calcular el valor de la amortización anual que debe abonarse para saldar, a interés simple:

1º) Deuda de 12 000 $ durante 10 años, al 4 % anual.

Respuesta: 1 428,73 $.

2º) Deuda de 60 000 $ durante 15 años, al 6 % anual.

Respuesta: 5 352,11 $.

3º) Deuda de 25 000 $ durante 12 años, al 3,5 % anual.

Respuesta: 2 430,78 $.

4º) Deuda de 18 000 $ durante 6 años, al 6 % anual.

Respuesta: 3 547,83 $.

5º) Deuda de 50 000 $ durante 10 años al 7 % anual.

Respuesta: 6 463,33 $.

6º) Deuda de 20 000 $ durante 5 años, al 5 % anual.

Respuesta: 4 345,45 $.

CAPÍTULO V.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

1. **DEFINICIONES.** Dados tres o más números en un determinado orden, se dice que forman progresión geométrica si cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por un número constante, que se llama *razón* de la progresión.

EJEMPLO 1º:

La sucesión:

$$2 \; ; \; 4 \; ; \; 8 \; ; \; 16 \; ; \; 32 \; ; \; 64$$

constituye una progresión geométrica de razón 2, pues cada uno de esos números se obtiene multiplicando el anterior por la constante 2. En efecto:

$$4 = 2 \times 2 \; ; \quad 8 = 4 \times 2 \; ; \quad 16 = 8 \times 2 \; ; \quad \text{etc.}$$

EJEMPLO 2º:

La sucesión:

$$-\frac{25}{3} \; ; \; 5 \; ; \; -3 \; ; \; \frac{9}{5} \; ; \; -\frac{27}{25}$$

es una progresión geométrica de razón $-\frac{3}{5}$, pues cada uno de esos números se obtiene multiplicando el anterior por la constante $-\frac{3}{5}$

En efecto:

$$5 = \left(-\frac{25}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) \quad ; \quad -3 = 5\left(-\frac{3}{5}\right) \quad ; \quad \text{etc.}$$

Cada uno de los números que constituyen la progresión se llama *término de la progresión*.

Obsérvese que, cuando la razón es positiva, los términos son todos del mismo signo. De modo que, si el primer término es positivo y la razón mayor que 1, los términos van siendo cada vez mayores y la progresión se llama *creciente*. Si el primer término es positivo y la razón también positiva es menor que 1, los términos van siendo cada vez menores y la progresión se llama *decreciente*. En cambio, cuando la razón es negativa, los términos resultan alternadamente uno positivo y uno negativo, es decir, uno mayor, uno menor, uno mayor, etc.

Como en las progresiones aritméticas, representaremos el primer término de una progresión geométrica finita por a; el último, por l; el número de términos, por n; y la razón, por q; es decir, simbólicamente:

$$\div\!\!\div \; \overbrace{a \; ; \; b \; ; \; c \; ; \; d \; ; \; \ldots \; ; \; j \; ; \; k \; ; \; l}^{n}$$

donde $\div\!\!\div$ es el signo de progresión geométrica.

De acuerdo con la definición, debe verificarse que:

$$b = aq \; ; \; c = bq \; ; \ldots ; \; k = jq \; ; \; l = kq$$

o bien, lo que es equivalente:

$$a = \frac{b}{q} \; ; \; b = \frac{c}{q} \; ; \; \ldots \; ; \; j = \frac{k}{q} \; ; \; k = \frac{l}{q}$$

es decir, que en toda progresión geométrica cada término es igual al cociente entre el que le sigue y la razón.

O bien:

$$\frac{b}{a} = q\ ;\ \frac{c}{b} = q\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{k}{j} = q\ ;\ \frac{l}{k} = q$$

es decir, que en toda progresión geométrica la razón es igual al cociente entre un término y el que le antecede; así queda justificado el nombre de razón que se da a dicho número constante, pues razón o cociente entre dos números son expresiones equivalentes.

EJEMPLO:

$$\div\ 500\ ;\ 50\ ;\ 5\ ;\ 0{,}5\ ;\ 0{,}05\ ;\ 0{,}005$$

es una progresión geométrica de un número finito de términos, donde:

el primer término es: $a = 500$

el último término es: $l = 0{,}005$

la razón es: $q = \dfrac{50}{500} = 0{,}1$

el número de términos es: $n = 6$

2. Fórmula del enésimo término. — Conociendo el primer término de una progresión geométrica de un número finito de términos, la razón y el número de términos; calculando, sucesivamente, de acuerdo con la definición, el segundo término, el tercero, el cuarto, etc., puede llegarse a obtener el último término de esa progresión.

Pero análogamente a lo dicho en progresiones aritméticas, cuando el número de términos es grande, el cálculo se hace largo; para abreviarlo se establece una fórmula que da directamente el último término en función del primero, de la razón y del número de términos.

TEOREMA. *El último término de una progresión geométrica es igual al producto del primer término, por la razón elevada a un exponente igual al número de términos menos 1.*

H) $\div\!\div \overbrace{a \; ; \; b \; ; \; c \; ; \; d \; ; \; \ldots \; ; \; j \; ; \; k \; ; \; l}^{n}$

T) $l = a\, q^{n-1}$.

Demostración. Como, por hipótesis:

$$a \; ; \; b \; ; \; c \; ; \; d \; ; \; \ldots \; ; \; j \; ; \; k \; ; \; l$$

es una progresión geométrica de *n* términos, debe verificarse que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{a} = q \\ \dfrac{c}{b} = q \\ \dfrac{d}{c} = q \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{k}{j} = q \\ \dfrac{l}{k} = q \end{array}\right\} n - 1$$

son $(n - 1)$ igualdades, pues éstas comienzan a formarse a partir del segundo término, y, si en total son n términos, a partir del segundo son $(n - 1)$.

Multiplicando miembro a miembro las $(n - 1)$ igualdades, se tiene

$$\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{d}{c} \times \ldots \times \frac{k}{j} \times \frac{l}{k} = \overbrace{qqq \ldots qq}^{n-1}$$

Pero en el primer miembro se simplifica el numerador de cada fracción con el denominador de la siguiente, quedando entonces únicamente el denominador a de la primera, y el numerador l de la última, es decir:

$$\frac{1}{a} = \overbrace{q\,q\,q\,\ldots\,q\,q}^{n-1} \qquad [1]$$

pero:

$$\overbrace{q\,q\,q\,\ldots\,q\,q}^{n-1} = q^{n-1}$$

sustituyendo en [1]:

$$\frac{1}{a} = q^{n-1}$$

y pasando el divisor a al segundo miembro como factor, resulta:

$$\boxed{1 = aq^{n-1}}$$

que es la tesis.

3. Fórmulas del primer término, de la razón y del número de términos. — Estas fórmulas se deducen de la del último término. En efecto:

1º Fórmula del primer término.

Siendo:

$$1 = a\ q^{n-1}$$

pasando el factor q^{n-1} al 1er. miembro, como divisor, se tiene:

$$\frac{1}{q^{n-1}} = a$$

o sea:

$$\boxed{a = \frac{1}{q^{n-1}}}$$

que expresa: *El primer término de una progresión geométrica es*

igual al último dividido por la razón elevada al número de términos menos uno.

2º FÓRMULA DE LA RAZÓN.

Siendo:

$$l = a\ q^{n-1}$$

pasando el factor a al primer miembro, como divisor se tiene:

$$\frac{l}{a} = q^{n-1}$$

o sea:

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}.$$

Como por definición la raíz de índice n — 1 de un número es otro número que elevado a la potencia n — 1 da por resultado el radicando, se tiene:

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}}$$

que expresa: *En una progresión geométrica, la razón está dada por la raíz de índice igual al número de términos menos uno, del cociente entre el último término y el primero.*

OBSERVACIÓN. Si (n — 1) es par, el radical es de índice par, y, por lo tanto, se obtienen para la razón dos resultados, de igual valor absoluto, pero de distinto signo.

3º FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS.

Siendo:

$$l = a\ q^{n-1}$$

es:

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}.$$

Luego, por propiedad uniforme de la logaritmación:

$$\log q^{n-1} = \log \frac{1}{a}$$

Aplicando las propiedades del logaritmo de una potencia y del logaritmo de un cociente:

$$(n-1)\log q = \log l - \log a$$

Pasando el factor $\log q$ al segundo miembro como divisor:

$$n - 1 = \frac{\log l - \log a}{\log q}$$

y trasponiendo el término 1, resulta:

$$n = \frac{\log l - \log a}{\log q} + 1$$

que expresa: *En una progresión geométrica, el número de términos es igual a la diferencia entre el logaritmo del último término y el del primero, dividida por el logaritmo de la razón, más uno.*

Nota. Cuando la razón y el número de términos no son muy grandes este número de términos n, puede calcularse mentalmente de la igualdad

$$q^{n-1} = \frac{1}{a}$$

Así por ejemplo, si:

$$a = 4$$
$$q = 3$$
$$l = 972$$

reemplazando en la fórmula, $q^{n-1} = \frac{l}{a}$ es:

$$3^{n-1} = \frac{972}{4}$$

o sea:

$$3^{n-1} = 243,$$

pero 243 es la 5ª potencia de 3, luego:

$$n - 1 = 5$$

$$\therefore \qquad n = 5 + 1$$

o sea:

$$n = 6$$

APLICACIONES.

1º ¿Cuál es el último término de una progresión geométrica de ocho términos, si la razón es -2 y el primero es $\frac{1}{5}$?

Aplicando la fórmula:

$$l = a\,q^{n-2}$$

donde:

$$a = \frac{1}{5} : q = -2 \ \text{ y } \ n = 8$$

se tiene:

$$l = \frac{1}{5}(-2)^7 = \frac{1}{5}(-128) = -\frac{128}{5}$$

$$\therefore \qquad l = -25{,}6 .$$

2º En el ejemplo anterior la potencia $(-2)^7$ se calculó mentalmente pero, cuando el número de términos es grande, para calcular las potencias correspondientes es necesario aplicar logaritmos.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{243} \\ q = -3 \\ n = 16 \\ l = x \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula:

$$l = a\,q^{n-1}$$

Reemplazando:

$$l = \frac{1}{243}(-3)^{16-1}$$

$$l = \frac{1}{243}(-3)^{15} \qquad [1]$$

Para calcular $(-3)^{15}$ es necesario aplicar logaritmos. Ahora bien, como la base es negativa, no se pueden aplicar directamente logaritmos, pero, teniendo en cuenta que el valor absoluto de $(-3)^{15}$ es igual al valor absoluto de 3^{15}, se calcula primero el signo de $(-3)^{15}$, y luego, por logaritmos, el valor absoluto, es decir: 3^{15}.

El signo de la potencia buscada es negativo, por ser base negativa y exponente impar.

CÁLCULO DEL VALOR ABSOLUTO:

$$\log 3^{15} = 15 \log 3 = 15 \times 0{,}477\,12 = 7{,}156\,80$$

$$3^{15} = \text{antilog } 7{,}156\,80 = 14\,348\,333$$

CÁLCULOS AUXILIARES:

1 434 | 15 655 |
| 30

$$\delta = \frac{25}{30} \cong 0{,}833\ldots$$

Luego

$$(-3)^{15} = -14\,348\,333$$

Este valor es aproximado, pues a la aproximación con que están calculadas las mantisas de las tablas se agregan las que resultan en los cálculos.

Finalmente, reemplazando el valor obtenido en la fórmula [1], resulta:

$$l = \frac{1}{243}(-14\,348\,333)$$

$$l = -\frac{14\,348\,333}{243}$$

3º En una progresión de seis términos y de razón $\frac{4}{5}$, el último término es 3. ¿Cuál es el primer término?

Sabemos que:

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}$$

siendo:

$$l = 3 \quad ; \quad q = \frac{4}{5} \quad ; \quad n = 6$$

reemplazando, es:

$$a = \frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)^5} \qquad [1]$$

pero $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1\,024}{3\,125}$

$\therefore$ reemplazando en [1]

$$a = \frac{\dfrac{3}{1\,024}}{3\,125}$$

$$\therefore \quad a = 3 \times \frac{3\,125}{1\,024}$$

o sea

$$a = \frac{9\,375}{1\,024}$$

4º Los extremos de una progresión de ocho términos son ordenadamente $-4\,608$ y 36. ¿Cuál es la razón?

Aplicamos la fórmula:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

Siendo en este caso:

$$n = 8 \quad ; \quad l = 36 \quad ; \quad a = -4\,608$$

se tiene

$$q = \sqrt[7]{-\frac{36}{4\,608}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{128}} = -\frac{1}{2}$$

5º Los extremos de una progresión de seis términos son, ordenadamente, 3 125 y 7 776. ¿Cuál es la razón?

Aplicamos la fórmula:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

Siendo en este caso:

$$n = 6 \quad ; \quad l = 7\,776 \quad ; \quad a = 3\,125$$

se tiene:

$$q = \sqrt[5]{\frac{7\,776}{3\,125}}$$

La $\sqrt[5]{\frac{7\,776}{3\,125}}$ es necesario calcularla mediante logaritmos.

$$\log.\ q = \log \sqrt[5]{\frac{7\,776}{3\,125}} = \frac{\log 7\,776 + \operatorname{colog} 3\,125}{5} =$$

$$= \frac{3{,}890\,76 + \bar{4}{,}505\,15}{5} = \frac{0{,}395\,91}{5}$$

o sea: $\log q = 0{,}079\,18$

Calculando el antilogaritmo, resulta:

$$q = 1{,}2\ .$$

6º ¿Cuántos términos tiene una progresión de razón 3 cuyos extremos son $\frac{1}{3}$ y 243?

En este caso, debemos aplicar la fórmula:

$$n = \frac{\log l - \log a}{\log q} + 1$$

Como $l = 243$, $\log 243 = 2{,}385\,61$

Como $a = \frac{1}{3}$, $\log \frac{1}{3} = \log 1 + \operatorname{colog} 3 = \bar{1}{,}522\,88$

Como $q = 3$, $\log 3 = 0{,}477\,12$.

Reemplazando en la fórmula, se tiene:

$$n = \frac{2{,}385\,61 - \bar{1}\,522{,}88}{0{,}477\,12} + 1$$

$$n = \frac{2{,}862\,73}{0{,}477\,12} + 1$$

$$n = 6 + 1$$

$$n = 7\ .$$

4. **Interpolación.** — Dados dos términos de una progresión geométrica, interpolar los términos comprendidos entre ellos significa calcular los términos que se encuentran entre los dos términos dados.

Para ello es necesario conocer la razón, y por multiplicaciones sucesivas se calculan los términos que hay que interpolar.

EJEMPLO:

Interpolar cuatro términos entre 2 y 486 .

Para calcular la razón, consideramos que los dos términos dados y los cuatro que hay que interpolar forman una progresión geométrica de seis términos, en que el primero es 2 y el último 486.

Luego, la razón es:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}} = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3\ .$$

Por lo tanto,

el 1er. término a interpolar es: $2 \times 3 = 6$
el 2º término a interpolar es: $6 \times 3 = 18$
el 3er. término a interpolar es: $18 \times 3 = 54$
el 4º término a interpolar es: $54 \times 3 = 162$.

Luego, se tiene la progresión geométrica:

$$\ldots\ ;\ 2\ ;\ \underbrace{6\ ;\ 18\ ;\ 54\ ;\ 162}_{\text{términos interpolados}}\ ;\ 486\ ;\ \ldots$$

5. Producto de dos términos equidistantes de los extremos en una progresión geométrica. — Así como en las progresiones aritméticas la suma de un par de términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos, en las progresiones geométricas se verifica que:

TEOREMA. *El producto de cada par de términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.*

H) $\div\!\div\ a;\ b;\ c;\ d;\ \ldots;\ i;\ j;\ k;\ l\ .$

T) $b k = a l$

$c j = a l$

$d i = a l$

etc.

Demostración.

Por definición de progresión geométrica, es:

$$b = a q$$

y $$k = \frac{l}{q}$$

Multipl. m. a m.: $$b k = a q \times \frac{l}{q}$$

y simplificando en el segundo miembro.

$$b k = a l \qquad [1]$$

Además, es: $$c = bq$$

y $$j = \frac{k}{q}$$

Multipl. m. a m.: $$cj = bq \times \frac{k}{q}$$

y simplificando: $$cj = bk \qquad [2]$$

De [2] y [1] $$cj = al\ .$$

Como se puede razonar del mismo modo para cualquier par de términos equidistantes de los extremos queda probada la tesis.

6. Producto de los n términos de una progresión geométrica finita.

TEOREMA. *El producto de los n términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada de la potencia enésima del producto de los extremos.*

H) $$\div \overbrace{a;\ b;\ c;\ \ldots;\ j;\ k;\ l}^{n}$$

$$P = abc \ldots jkl$$

T) $$P = \sqrt{(al)^n}\ .$$

Demostración.

Siendo, por hipótesis:

$$P = \overbrace{abc \ldots jkl}^{n}$$

y por propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$P = \overbrace{lkj \ldots cba}^{n}$$

multiplicando miembro a miembro estas igualdades, y por columnas en el segundo miembro, se tiene:

$$P\,P = \overbrace{(a\,l)\,(b\,k)\,(c\,j)\ldots(j\,c)\,(k\,b)\,(l\,a)}^{\text{n paréntesis}}\ .$$

Pero:

$$P\,P = P^2$$

y cada uno de los n paréntesis del segundo miembro es el producto de dos términos equidistantes de los extremos; luego, por el teorema anterior, cada uno de ellos es igual al producto de los extremos, es decir:

$$P^2 = \overbrace{(a\,l)(a\,l)\,(a\,l)\ldots(a\,l)(a\,l)\,(a\,l)}^{\text{n paréntesis}}$$

o sea:

$$P^2 = (a\,l)^n$$

y extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\boxed{P = \sqrt{(a\,l)^n}}$$

que es la tesis.

EJEMPLO 1º:

Calcular el producto de los ocho términos de una progresión geométrica cuyos extremos son ordenadamente -5 y $-0{,}8$.

Debemos aplicar la fórmula obtenida:

$$P = \sqrt{(a\,l)^n} \qquad [1]$$

Como:

$$a = -5\ ;\quad l = -0{,}8\ ;\quad n = 8$$

reemplazando en [1]:

$$P = \sqrt{[(-5)\,(-0{,}8)]^8}\ .$$

Simplificando índice y exponente:

$$P = [(-5)(-0{,}8)]^4$$

o sea:

$$P = 4^4$$

$$P = 256\,.$$

EJEMPLO 2º:

Calcular el producto de los doce términos de una progresión geométrica cuyos dos primeros términos son $0{,}6$ y $-1{,}2$.

Debemos aplicar la fórmula obtenida:

$$P = \sqrt{(a\,l)^n} \qquad [1]$$

Como: $a = 0{,}6$ y $n = 12$, nos falta calcular el último término, para lo cual hallamos primero la razón:

$$q = \frac{-1{,}2}{0{,}6} = -2$$

Luego:

$$l = a\,q^{n-1} = 0{,}6\,(-2)^{11} = -1\,228{,}8$$

Reemplazando en [1]:

$$P = \sqrt{[0{,}6\,(-1228{,}8)]^{12}}\,.$$

Simplificando índice y exponente:

o sea:

$$P = [0{,}6\,(-1228{,}8)]^6$$

$$P = (-737{,}28)^6\,.$$

La potencia $(-737{,}28)^6$ es positiva; y, para el cálculo del valor absoluto, según hemos visto, aplicamos logaritmos como si la base fuera positiva. Luego:

$$\log P = 6 \log 737{,}28$$

$$\log P = 6 \times 2{,}867\,63$$

$$\log P = 17{,}205\,78$$

$$P = \text{antilog } 17{,}205\,78$$

$$P = 160\,610\,000\,000\,000\,000 .$$

7. Suma de los n términos de una progresión geométrica finita.—

TEOREMA. *La suma de los n términos de una progresión geométrica es igual al producto del primer término por la diferencia de la enésima potencia de la razón menos uno, dividido por la razón menos uno.*

H) $\div\!\div\; a ; b ; c ; d ; \ldots ; j ; k ; l$

$$S = a + b + c + d + \ldots + j + k + l .$$

T) $$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Demostración.

Por hipótesis es:

$$S = a + b + c + d + \ldots + j + k + l \qquad [1]$$

pero siendo:

$$b = aq$$

y $\qquad c = bq \quad \therefore \quad c = aq^2$

y $\qquad d = cq \quad \therefore \quad d = aq^3$

....

....

Del mismo modo:

$$j = aq^{n-3}$$

$$k = aq^{n-2}$$

$$l = aq^{n-1} .$$

Reemplazando estos valores en [1]:

$$S = a + \overbrace{a\,q + a\,q^2 + a\,q^3 + \ldots + a\,q^{n-3} + a\,q^{n-2} + a\,q^{n-1}} \qquad [2]$$

Multiplicando por q ambos miembros:

$$S\,q = \overbrace{a\,q + a\,q^2 + a\,q^3 + a\,q^4 + \ldots + a\,q^{n-2} + a\,q^{n-1}} + a\,q^n \qquad [3]$$

Restamos miembro a miembro de la igualdad [3] la igualdad [2]. Para ello observamos que los segundos miembros tienen exactamente iguales los términos que abarcan las respectivas llaves. En consecuencia al restarlos, estos términos se anulan y queda solamente $a\,q^n$ de [3] y a de [2], es decir:

$$S\,q - S = a\,q^n - a$$

Sacando S factor común en el primer miembro, y a en el segundo, se tiene:

$$S\,(q-1) = a\,(q^n - 1)$$

Luego, pasando el factor $q - 1$ al segundo miembro:

$$\boxed{S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}}$$

que es la tesis.

Ejemplo 1º:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{11} \\ q = 10 \\ n = 6 \\ S = x \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Reemplazando por los datos del problema:

$$S = \frac{\left(-\frac{1}{11}\right)\left(10^6 - 1\right)}{10 - 1} = \frac{\left(-\frac{1}{11}\right)\left(1\,000\,000 - 1\right)}{9} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{\cancel{11}}\right)\overset{10\,101}{\cancel{\overset{111\,111}{\cancel{999\,999}}}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = -10\,101\,.$$

EJEMPLO 2º:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ q = \dfrac{3}{2} \\ n = 30 \\ S = x \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Reemplazando por los datos del problema:

$$S = \frac{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{30} - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{30} - 1\right]}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{30} - 1\right] = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{30} - 1}{2} \qquad [1]$$

Cálculo de $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right)^{30} = 30\ (\log\ 3 + \operatorname{colog}\ 2) =$$

$$= 30\ (0{,}477\,12 + \bar{1}{,}698\,97) =$$

$$= 30 \times 0{,}176\,09$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right)^{30} = 5{,}282\,70$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{30} = \text{antilog}\ 5{,}282\,70$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{30} = 191\,735$$

Reemplazando en [1]

$$S = \frac{191\,735 - 1}{2} = \frac{191\,734}{2}$$

$$S = 95\,867\ .$$

Observación 1ª: En general, la suma y el producto de los términos de una progresión geométrica resultan números que sorprenden, pues son mucho mayores que los que intuitivamente se supone; y existen sobre este asunto problemas clásicos, como son el de los "granos de trigo correspondientes al tablero de ajedrez", y el de "la casa barata", que pasamos a considerar:

1er. Problema. Sisla, inventor del juego del ajedrez, consiguió mediante este juego interesar en tal forma a su emperador, que éste le ofreció la recompensa que quisiera. Sisla entonces pidió como tal, los granos de trigo que resultaran de colocar: un grano en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta y así siguiendo hasta completar las 64 casillas. Este pedido pareció irrisorio al emperador, que por cierto resultó sorprendido cuando conoció el resultado.

En efecto: El número de granos de trigo pedidos por Sisla es la suma de los términos de una progresión geométrica en la que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ q = 2 \\ n = 64 \end{cases}$$

Luego:

$$S = \frac{a\ (q^n - 1)}{q - 1.} = \frac{1\,(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

y efectuando las operaciones correspondientes se obtiene:

$$S = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 - 1$$

Luego, el número buscado de granos de trigo es

$$S = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Si se tiene en cuenta que 1 hl de trigo contiene aproximadamente 2 millones de granos de trigo, y atribuyendo a cada hl un precio de 20 $, el inventor Sisla recibiría

$$\frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \times 20}{2\,000\,000},$$

es decir, aproximadamente:

$$184\,467\,440\,737\,096\ \$.$$

2º Problema. Una casa tiene una escalera de 25 escalones. El propietario la vende exigiendo en pago: un peso en el primer peldaño de la escalera, dos en el segundo, cuatro en el tercero y así siguiendo hasta el último escalón. El comprador acepta de inmediato, creyendo hacer un excelente negocio. Veamos cuánto le costó la casa:

Es inmediato que el precio, es la suma de los 25 términos de la progresión geométrica de razón 2, y cuyo primer término es 1.

Luego:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1\,(2^{25} - 1)}{2 - 1} = 2^{25} - 1\ .$$

Por consiguiente, el precio de venta es:

33 554 432 — 1 = 33 554 431 pesos

sea 33 554 431 $.

OBSERVACIÓN 2ª. Si en la expresión conocida de la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Se efectúa el producto indicado en el numerador se tiene:

$$S = \frac{a\,q^n - a}{q - 1} \qquad [1]$$

Teniendo en cuenta que: $l = a\,q^{n-1}$, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por q, se obtiene:

$$lq = a\,q^{\,n-1}\,q$$

$$lq = a\,q^n$$

Reemplazando en la igualdad [1] $a\,q^n$ por su igual lq resulta:

$$\boxed{S = \frac{lq - a}{q - 1}}$$

Conviene aplicar esta fórmula de la suma cuando los datos son el primer término, el último término y la razón.

8. Suma de los términos de una progresión geométrica de infinitos términos.—Hasta ahora hemos estudiado progresiones que tienen un número finito de términos; es decir progresiones que tienen un primero y un último términos. Pasemos ahora al caso en que el número de términos es infinito. Así, por ejemplo, supongamos la progresión geométrica que tiene por primer término el número 1 y como sucesivos términos las potencias de 2, es decir, la progresión geométrica:

$$\div\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ 16\ ;\ 32\ ;\ \ldots\ldots$$

Esta sucesión de números en que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por 2, constituye una progresión geométrica de un número ilimitado de términos, pues tiene un primer término pero no un último término dado que cualquiera de ellos que se considere, siempre admite un término siguiente que se obtiene multiplicando el anterior por 2; así, considerando el término 32, resulta $32 \times 2 = 64$; obtenido 64 hay otro término que le sigue $64 \times 2 = 128$; a 128 hay otro término que le sigue $128 \times 2 = 256$, etc. Que la progresión tiene infinitos términos se indica, según destacamos en el ejemplo anterior, escribiendo los primeros términos de la progresión geométrica y a continuación de ellos puntos suspensivos que indican que los términos continúan indefinidamente.

Vamos a estudiar ahora el valor a que tiende la suma de estas progresiones geométricas de infinitos números de términos.

Recordemos que la expresión que nos da la suma de los términos de una progresión geométrica de un número finito de términos es:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Efectuando la multiplicación indicada en el numerador:

$$S = \frac{a\,q^n - a}{q - 1}$$

Si en esta expresión aplicamos la propiedad distributiva de la división con respecto a la suma algebraica resulta:

$$S = \frac{a\ q^n}{q - 1} - \frac{a}{q - 1} \qquad [1]$$

Ha quedado así descompuesta la suma de la progresión en la diferencia de dos fracciones.

Vamos a ver el valor al cual tiende cada una de ellas cuando el número de términos n tiende a infinito. Para ello, es preciso considerar dos casos: primero, que el valor absoluto de la razón q sea menor que 1, y segundo, que el valor absoluto de la razón q sea mayor que 1.

1er. Caso:

$$|q| < 1$$

En este caso, como el valor absoluto de q es menor que 1, la potencia q^n se va haciendo cada vez más pequeña a medida que aumenta n; pues estamos multiplicando por factores de valor absoluto menor que la unidad. (Así por ejemplo si la razón fuera 0,5 las sucesivas potencias serán: 0,25 ; 0,125 ; 0,062 5 ; 0,031 25 ; etc., valores que, como se ve, van siendo cada vez menores).

Luego, como n tiende a infinito q^n va decreciendo cada vez más, tendiendo a cero en el caso límite y por lo tanto, también tiende a cero, para n tendiendo a infinito la fracción $\frac{a\,q^n}{q - 1}$. Por lo tanto, el segundo miembro de la igualdad [1], como el primer término tiende a cero, se reduce al segundo término: $-\frac{a}{q - 1}$, es decir, en este caso la suma de los términos de la progresión geométrica tiende al valor

$$S = -\frac{a}{q - 1}$$

Introduciendo el signo menos en el denominador, se tiene:

$$S = \frac{a}{-(q - 1)}$$

o bien

$$S = \frac{a}{-q+1}$$

o sea

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Sea, por ejemplo, calcular la suma de:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots\ldots$$

Constituye la suma de los términos de una progresión geométrica de infinitos términos en la que el primer término es 1 y la razón

$$q = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad |q| = \frac{1}{2} < 1$$

luego, estamos en el caso considerado y podemos aplicar la expresión:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

es decir:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Luego podemos decir que la suma dada tiende al número 2 cuando n tiende a infinito.

2º Caso: El valor absoluto de la razón q es mayor que 1, es decir:

$$|q| > 1$$

En este caso, como el valor absoluto de q es mayor que 1, la potencia q^n se irá haciendo cada vez mayor, a medida que aumenta

n, pues estamos multiplicando por números en valor absoluto mayores que la unidad. (Así, por ejemplo, si la razón fuera 3 las sucesivas potencias son 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243, etc., valores que van siendo cada vez mayores) y como n tiende a infinito, q^n va creciendo indefinidamente y llega a sobrepasar cualquier valor; en consecuencia, también tiende a infinito la fracción

$$\frac{aq^n}{q-1}$$

y por lo tanto tiende a infinito la suma de los términos de la progresión, y aunque se le reste el valor determinado de la fracción

$$\frac{a}{q-1}$$

el segundo miembro de [1] tiende a infinito, o sea, en este caso tiende a infinito la suma de los términos de la progresión.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Escribir:

1º) Los 5 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = -4 \quad , \quad q = -2 .$$

2º) Los 7 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = 12 \quad , \quad q = \frac{1}{2} .$$

3º) Los 4 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = \frac{9}{4} \quad , \quad q = \frac{2}{3} .$$

4º) Los 6 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = \frac{1}{5} \quad , \quad q = -2 .$$

5º) Los 5 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = -2 \quad , \quad q = -\frac{1}{4} .$$

6º) Los 8 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = -\sqrt{2} \quad , \quad q = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

7º) Los 6 primeros términos de la progresión geométrica tal que:

$$a = -\frac{2}{9} \quad , \quad q = -\sqrt{3}.$$

¿Cuál es la razón de una progresión geométrica tal que:

1º) El primer término es $\frac{3}{5}$ y el segundo es 6?

2º) El primer término es -1 y el segundo es $\frac{3}{4}$?

3º) El segundo término es $-\frac{2}{3}$ y el tercero es $\frac{1}{9}$?

4º) El sexto término es $\frac{5}{4}$ y el séptimo es -5?

5º) El tercer término es -4 y el quinto es 1?

6º) El octavo término es $2\sqrt{2}$ y el décimo es $4\sqrt{2}$?

Escribir:

1º) Los tres primeros términos de una progresión geométrica, siendo el cuarto término -2 y la razón $-\frac{1}{2}$.

2º) Los cuatro primeros términos de una progresión, siendo el sexto término $\frac{3}{8}$ y el quinto $\frac{1}{4}$.

Problemas:

1º) El tercer término de una progresión geométrica es 9, la razón es $\sqrt{3}$; calcular el quinto y el octavo términos de la misma.

2º) El sexto término de una progresión geométrica, es $-\frac{1}{3}$; la razón, -3; calcular el cuarto y el primer término de la misma.

Interpolar:

1º) Tres términos entre -3 y -48.

2º) Cinco términos entre 27 y $\frac{1}{27}$.

3º) Cuatro términos entre $\frac{3}{16}$ y 3.

4º) Seis términos entre $\frac{64}{9}$ y 81.

5º) Siete términos entre 2 y 31.

Calcular el último término en cada una de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = 2 \\ q = -3 \\ n = 6 \\ l = x \end{cases}$

2º) $\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ q = 2 \\ n = 9 \\ l = x \end{cases}$

3º) $\begin{cases} a = 3 \\ q = \frac{1}{2} \\ n = 10 \\ l = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} a = 5 \\ q = -\frac{1}{4} \\ n = 5 \\ l = x \end{cases}$

5º) $\begin{cases} a = 9 \\ q = -2 \\ n = 7 \\ l = x \end{cases}$

6º) $\begin{cases} a = -6 \\ q = -\frac{1}{3} \\ n = 4 \\ l = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} a = 2 \\ q = -\frac{1}{5} \\ n = 41 \\ l = x \end{cases}$

8º) $\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ q = -2 \\ n = 11 \\ l = x \end{cases}$

9º) $\begin{cases} a = -2 \\ q = -\frac{1}{6} \\ n = 29 \\ l = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} a = -1{,}2 \\ q = 0{,}1 \\ n = 4 \\ l = x \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2} \\ n = 19 \\ l = x \end{cases}$ 12º) $\begin{cases} a = 1 \\ q = 0{,}2 \\ n = 15 \\ l = x \end{cases}$

13º) $\begin{cases} a = -m \\ q = \frac{1}{2} m \\ n = 5 \\ l = x \end{cases}$ 14º) $\begin{cases} a = 2y \\ q = -3 \\ n = 6 \\ l = x \end{cases}$ 15º) $\begin{cases} a = -3 \\ q = \sqrt{5} \\ n = 9 \\ l = x \end{cases}$

Calcular el primer término de cada una de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} l = 144 \\ q = 2 \\ n = 5 \\ a = x \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} l = 12\,288 \\ q = -4 \\ n = 4 \\ a = x \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} l = 4 \\ q = \sqrt{2} \\ n = 15 \\ a = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} l = \frac{1}{3} \\ q = \frac{1}{3} \\ n = 4 \\ a = x \end{cases}$ 5º) $\begin{cases} l = 2 \\ q = -0{,}5 \\ n = 5 \\ a = x \end{cases}$ 6º) $\begin{cases} l = \frac{1}{2} \\ q = 2 \\ n = 21 \\ a = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} l = \frac{1}{16} \\ q = -\frac{1}{4} \\ n = 7 \\ a = x \end{cases}$ 8º) $\begin{cases} l = -2 \\ q = -2 \\ n = 10 \\ a = x \end{cases}$ 9º) $\begin{cases} l = 1{,}5 \\ q = -\frac{1}{4} \\ n = 9 \\ a = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} l = 243 \\ q = 2 \\ n = 15 \\ a = x \end{cases}$

11º) $\begin{cases} l = -36 \\ q = 2 \\ n = 9 \\ a = x \end{cases}$

12º) $\begin{cases} l = -486 \\ q = -3 \\ n = 6 \\ a = x \end{cases}$

13º) $\begin{cases} l = 3{,}5 \\ q = \frac{1}{2} \\ n = 12 \\ a = x \end{cases}$

14º) $\begin{cases} l = 20 \\ q = 0{,}5 \\ n = 35 \\ a = x \end{cases}$

15º) $\begin{cases} l = 150 \\ q = -\frac{1}{2} \\ n = 9 \\ a = x \end{cases}$

Calcular la razón de cada una de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = 27 \\ l = 8 \\ n = 4 \\ q = x \end{cases}$

2º) $\begin{cases} a = 5 \\ l = 1\,280 \\ n = 9 \\ q = x \end{cases}$

3º) $\begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ l = 729 \\ n = 5 \\ q = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} a = -1 \\ l = -81 \\ n = 5 \\ q = x \end{cases}$

5º) $\begin{cases} a = \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ l = 2\sqrt{2} \\ n = 7 \\ q = x \end{cases}$

6º) $\begin{cases} a = 3 \\ l = 768 \\ n = 9 \\ q = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} a = 16 \\ l = \frac{1}{32} \\ n = 10 \\ q = x \end{cases}$

8º) $\begin{cases} a = 80 \\ l = \frac{5}{2} \\ n = 11 \\ q = x \end{cases}$

9º) $\begin{cases} a = 9 \\ l = \frac{1}{729} \\ n = 9 \\ q = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} a = 1 \\ l = 64 \\ n = 7 \\ q = x \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{16} \\ l = -\dfrac{1}{512} \\ n = 5 \\ q = x \end{cases}$ 12º) $\begin{cases} a = 6\,000 \\ l = 0{,}006 \\ n = 7 \\ q = x \end{cases}$

Calcular el número de términos de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = 3 \\ l = 243 \\ q = 3 \\ n = x \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} a = 1 \\ l = 0{,}000\,01 \\ q = 0{,}1 \\ n = x \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} a = 2 \\ l = 512 \\ q = 2 \\ n = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} a = \dfrac{1}{10} \\ l = 100\,000 \\ q = 10 \\ n = x \end{cases}$ 5º) $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ l = 16 \\ q = 2 \\ n = x \end{cases}$ 6º) $\begin{cases} a = 6 \\ l = 0{,}75 \\ q = \dfrac{1}{2} \\ n = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} a = 16 \\ l = \dfrac{27}{4} \\ q = \dfrac{3}{4} \\ n = x \end{cases}$ 8º) $\begin{cases} a = \dfrac{1}{128} \\ l = 8\,192 \\ q = 4 \\ n = x \end{cases}$ 9º) $\begin{cases} a = 486 \\ l = \dfrac{2}{3} \\ q = \dfrac{1}{3} \\ n = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} a = 128 \\ l = 40{,}5 \\ q = 0{,}75 \\ n = x \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} a = 9\sqrt{2} \\ l = 576 \\ q = \sqrt{2} \\ n = x \end{cases}$ 12º) $\begin{cases} a = 3\sqrt{3} \\ l = 27\sqrt{3} \\ q = \sqrt{3} \\ n = x \end{cases}$

Calcular el producto de los términos de cada una de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = 4 \\ l = 25 \\ n = 4 \\ P = x \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} a = -3 \\ l = -12 \\ n = 6 \\ P = x \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ l = -16 \\ n = 6 \\ P = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} a = -12 \\ l = \frac{1}{4} \\ n = 10 \\ P = x \end{cases}$ 5º) $\begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ l = \frac{2}{5} \\ n = 3 \\ P = x \end{cases}$ 6º) $\begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ l = -20 \\ n = 5 \\ P = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} a = 4{,}5 \\ l = 12 \\ n = 18 \\ P = x \end{cases}$ 8º) $\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ l = -\frac{3}{8} \\ n = 41 \\ P = x \end{cases}$ 9º) $\begin{cases} a = 9 \\ l = -\frac{1}{6} \\ n = 12 \\ P = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} a = -2 \\ l = -32 \\ n = 9 \\ P = x \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ l = -\sqrt{8} \\ n = 3 \\ P = x \end{cases}$ 12º) $\begin{cases} a = 125 \\ l = 5 \\ n = 19 \\ P = x \end{cases}$

Calcular la suma de los términos de cada una de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = 3 \\ q = 2 \\ n = 8 \\ S = x \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} a = 2 \\ q = -10 \\ n = 6 \\ S = x \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ q = 2 \\ n = 9 \\ S = x \end{cases}$

4º) $\begin{cases} a = -3 \\ q = -1 \\ n = 25 \\ S = x \end{cases}$ 5º) $\begin{cases} a = \frac{7}{5} \\ q = -\frac{2}{5} \\ n = 5 \\ S = x \end{cases}$ 6º) $\begin{cases} a = 15 \\ q = -4 \\ n = 5 \\ S = x \end{cases}$

7º) $\begin{cases} a = 3{,}5 \\ q = 0{,}5 \\ n = 4 \\ S = x \end{cases}$ 8º) $\begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ q = \frac{1}{2} \\ n = 8 \\ S = x \end{cases}$ 9º) $\begin{cases} a = 10 \\ q = 3 \\ n = 6 \\ S = x \end{cases}$

10º) $\begin{cases} a = -12{,}8 \\ q = 9{,}4 \\ n = 6 \\ S = x \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ q = 0{,}2 \\ n = 60 \\ S = x \end{cases}$

12º) $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ l = 20 \\ q = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ S = x \end{cases}$ 13º) $\begin{cases} a = -0{,}3 \\ l = 1{,}5 \\ q = -2 \\ S = x \end{cases}$ 14º) $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ l = -1 \\ q = \frac{3}{2} \\ S = x \end{cases}$

Calcular el primero y el último término de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ n = 9 \\ S = 1022 \\ a = x \\ l = y \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} q = \sqrt{3} \\ n = 10 \\ S = \sqrt{3} \\ a = x \\ l = y \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} q = \sqrt{2} \\ n = 7 \\ S = 127\,(1 + \sqrt{2}) \\ a = x \\ l = y \end{cases}$

Calcular la razón y el número de términos de las progresiones geométricas cuyos datos se dan a continuación:

1º) $\begin{cases} a = -1 \\ l = -\dfrac{1}{8} \\ S = -1{,}875 \\ q = x \\ n = y \end{cases}$

2º) $\begin{cases} a = \dfrac{20}{3} \\ l = \dfrac{1}{15\,000} \\ S = 7{,}407\,4 \\ q = x \\ n = y \end{cases}$

3º) $\begin{cases} a = \dfrac{1}{9} \\ l = 27 \\ S = \dfrac{182}{9} \\ q = x \\ n = y \end{cases}$

Resolver los siguientes problemas:

1º) Calcular el décimo término de la progresión geométrica que tiene por tercero y quinto términos, respectivamente:

$$-\frac{2}{3} \text{ y } -6 .$$

2º) Calcular el decimoquinto término de la progresión geométrica que tiene por segundo y cuarto términos, respectivamente:

$$\frac{1}{25}\sqrt{5} \text{ y } \frac{1}{5}\sqrt{5} .$$

3º) Calcular el primer término de una progresión geométrica que tiene por 5º y 7º términos, respectivamente:

$$\frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{16} .$$

4º) Calcular el producto de los 9 términos de una progresión geométrica cuyos dos primeros términos son:

$$-\frac{1}{3} \text{ y } \frac{1}{9} .$$

5º) Calcular el producto de los 6 términos de una progresión geométrica que tiene por 3º y 5º términos, respectivamente:

$$-8\sqrt{3} \text{ y } -18\sqrt{3} .$$

6º) En una progresión geométrica de 11 términos y razón 2, la suma de todos los términos es 4 094. Calcular el primero.

7º) En una progresión geométrica el tercer término es $-\dfrac{1}{9}$ y el quinto -1. Calcular la suma de los 10 términos de dicha progresión.

8º) Calcular el producto de los 15 primeros números naturales.

9º) Calcular el producto de los 12 primeros números impares.

10º) En una progresión geométrica de 7 términos, el primero es 6 000 y el último 0,006. Calcular la suma de todos los términos.

11º) Los extremos de una progresión geométrica son, ordenadamente $\frac{1}{2}$ y -64, y la suma de todos los términos es -21. Calcular el valor de los términos intermedios.

12º) En una progresión geométrica se tiene que: $n = 7$; $S = -547$, y $q = -3$. Calcular el último término de dicha progresión.

13º) Seis hermanos reciben un legado. El mayor recibe 75 000 \$; el segundo 150 000 \$; el tercero 300 000 \$ y así siguiendo. ¿Cuántos de ellos son millonarios por este legado?

14º) Se tiene un cuadrado de 12 cm de lado. Se determina el cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de los lados del primero; se determina un tercer cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de los lados del segundo y así siguiendo se repite esta operación 5 veces. Calcular la suma de las superficies de todos los cuadrados.

Calcular los valores a que tienden las siguientes sumas:

1º) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

2º) $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \dots$

3º) $-2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{27}{32} - \frac{81}{128} + \dots$

Calcular la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica:

1º) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$ ...

NOCIONES ELEMENTALES DE ÁLGEBRA FINANCIERA.

INTERÉS COMPUESTO.

9. Definiciones: El interés que produce un capital puede ser *simple* o *compuesto.* Recordemos que el interés es simple cuando no se suma al capital, y, por lo tanto, este capital permanece cons-

tante durante todo el tiempo que está colocado. El interés es compuesto cuando al cabo de períodos, fijados de antemano, los intereses se acumulan al capital para producir nuevos intereses.

El período fijado con anterioridad, al cabo del cual se calcula el interés simple que se suma al capital, se llama *período de capitalización.*

La razón debe corresponder al período de capitalización; así, si el período de capitalización es un año, un semestre o un trimestre, la razón debe ser, respectivamente: anual, semestral o trimestral.

Veamos en un ejemplo la diferencia entre el interés simple y el interés compuesto producidos por un mismo capital durante el mismo tiempo y a igual razón.

Sea un capital de 10 000 \$ colocado al 5 % durante 4 años.

INTERÉS SIMPLE: Aplicando la fórmula ya conocida, se tiene:

$$I = \frac{CRT}{100} = \frac{10\,000\ \$ \times 5 \times 4}{100} = 2\,000\ \$.$$

INTERÉS COMPUESTO: Supongamos que el período de capitalización es anual.

1er. período: El capital C_1 es de 10 000 \$.

$$C_1 = 10\,000\ \$ \qquad ; \qquad I_1 = \frac{10\,000\ \$ \times 5}{100} = 500\ \$.$$

2º período: El capital C_2 de este período es igual al capital C_1 del 1er. período más el interés I_1 del 1er. período, es decir:

$$C_2 = C_1 + I_1 = 10\,000\ \$ + 500\ \$ = 10\,500\ \$$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{10\,500\ \$ \times 5}{100} = 525\ \$.$$

3er. período: El capital C_3 es igual al anterior C_2 más el interés I_2 del 2º período, es decir:

$$C_3 = C_2 + I_2 = 10\,500\ \$ + 525\ \$ = 11\,025\ \$$$

$$\therefore \quad I_3 = \frac{11\,025\ \$ \times 5}{100} = 551{,}25\ \$\ .$$

4º período: El capital C_4 es igual al capital anterior C_3 más el interés I_3 del 3er. período, es decir:

$$C_4 = C_3 + I_3 = 11\,025\ \$ + 551{,}25\ \$ = 11\,576{,}25\ \$$$

$$\therefore \quad I_4 = \frac{11\,576{,}25\ \$ \times 5}{100} = 578{,}81\ \$\ .$$

Luego, el interés total I producido al cabo de los 4 años es igual a la suma de los intereses parciales, es decir:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2\,155{,}06\ \$\ .$$

Como se ve, el interés compuesto excede al interés simple; en este caso particular en 155,06 %.

FÓRMULAS CORRESPONDIENTES AL INTERÉS COMPUESTO

10. **Monto.** — Recordando que el monto es la suma del capital más el interés, y designando por *i* el tanto por uno correspondiente al período de capitalización, se tiene que:

al cabo del primer período:

$$1\ \$ \text{ se transforma en } (1+i)\ \$$$

$$\therefore \quad C\ \$ \text{ se transforma en } C(1+i)\ \$\ .$$

Luego, el capital para el segundo período será: $C(1+i)\ \$$.

Durante el segundo período:

$$1\ \$ \text{ se transforma en } (1+i)\ \$$$

$$\therefore \quad C(1+i)\ \$ \text{ se transforma en } C(1+i)(1+i)\ \$ = C(1+i)^2\ \$.$$

Luego, el capital para el tercer período es: $C(1+i)^2$ \$.

Durante el tercer período:

$$1 \text{ \$ se transforma en } (1+i) \text{ \$}$$

$\therefore$ $C(1+i)^2$ \$ se transforma en $C(1+i)^2(1+i)\text{ \$} = C(1+i)^3$ \$.

Luego, el capital para el 4º período será $C(1+i)^3$ \$.

Y así siguiendo, al final de n períodos de capitalización, el capital inicial C se habrá transformado en un monto:

$$\boxed{M = C(1+i)^n}$$

fórmula que expresa que: *el monto de un capital colocado a interés compuesto durante un cierto tiempo* t *es igual al capital inicial multiplicado por la suma de* 1 *más el tanto por uno, elevada al número de períodos de capitalización comprendidos en* t.

EJEMPLO:

¿Cuál es el monto correspondiente a un capital de 12 000 \$ colocado a interés compuesto al 4 % anual, durante $2\frac{1}{2}$ años, capitalizando cada semestre?

Como el período es semestral, debemos calcular el tanto por uno semestral.

Si el tanto por ciento anual es 4, el tanto por ciento semestral es 2, y el tanto por uno semestral: $i = 0{,}02$.

Como el período es semestral, y en $2\frac{1}{2}$ años hay 5 semestres, es: $n = 5$.

Luego, en este caso:

$$M = C(1+i)^n = 12\,000\,(1+0{,}02)^5$$

o sea:

$$M = 12\,000 \times (1{,}02)^5.$$

Aplicando logaritmos:

$$\log M = \log 12\,000 + 5 \log 1{,}02$$

$$\log M = 4{,}079\,18 + 5 \times 0{,}008\,60$$

$$\log M = 4{,}079\,18 + 0{,}043\,00 = 4{,}122\,18\,.$$

Luego:

$$M = \text{antilog } 4{,}122\,18$$

$$M = 13\,248{,}78\,.$$

Por lo tanto:

$$M = 13\,248{,}78\ \$\,.$$

NOTA: Existen tablas donde figuran calculados los valores de $(1 + i)^n$, que se utilizan comúnmente en la práctica.

11. Cálculo del interés compuesto. — Como el monto es igual al capital más el interés, resulta que el interés es igual a la diferencia entre el monto y el capital inicial, es decir:

$$\boxed{I = M - C}$$

Dado que el capital inicial C se conoce, y el monto se calcula mediante la fórmula:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

puede obtenerse el interés compuesto.

12. Fórmula del capital inicial:

Siendo:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

Pasando el factor $(1 + i)^n$ al primer miembro, se tiene:

$$\frac{M}{(1 + i)^n} = C$$

o sea:

$$\boxed{C = \frac{M}{(1 + i)^n}}$$

Fórmula que permite calcular el capital inicial, cuando se conoce el monto, la razón y el número de períodos de capitalización.

13. Fórmula de la razón.

Siendo:

$$M = C(1 + i)^n .$$

Pasando el factor C al primer miembro, se tiene:

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

o sea:

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C}$$

extrayendo la raíz enésima a ambos miembros:

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}}$$

de donde pasando el término 1 al segundo miembro con signo menos, resulta:

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1}$$

Esta fórmula nos da el tanto por uno correspondiente al período de capitalización.

Si se desea conocer el tanto por ciento, r, bastará multiplicar por 100, es decir:

$$r = i \times 100 \ .$$

14. Fórmula del tiempo:

Siendo:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

es:

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^n$$

o sea:

$$(1 + i)^n = \frac{M}{C}$$

Tomando logaritmos:

$$n \log (1 + i) = \log M - \log C \ .$$

Pasando el factor $\log (1 + i)$ al segundo miembro, resulta:

$$\boxed{n = \frac{\log M - \log C}{\log (1 + i)}}$$

Esta fórmula nos da el número de períodos correspondientes. Conocido el número de períodos y la duración de cada uno de ellos, se calcula el tiempo durante el cual estuvo colocado el capital.

EJEMPLO:

¿Durante cuánto tiempo un capital de 20 000 $ colocado a interés compuesto, al 4 % anual, dio un monto de 22 499,28 $, siendo el período de capitalización anual?

Aplicamos la fórmula:

$$n = \frac{\log M - \log C}{\log (1 + i)}$$

donde:

$$M = 22\,499{,}28 \quad ; \quad C = 20\,000 \quad ; \quad i = 0{,}04 .$$

Luego:

$$n = \frac{\log 22\,499{,}28 - \log 20\,000}{\log 1{,}04}$$

$$n = \frac{4{,}352\,17 - 4{,}301\,03}{0{,}017\,03}$$

$$n = 3 .$$

Por consiguiente, como son tres períodos de un año cada uno, el tiempo total es de tres años.

ANUALIDADES.

Ya hemos estudiado las anualidades a interés simple. Vamos a estudiar ahora anualidades a interés compuesto. Para ello recordamos que se llama *anualidad* a una suma constante de dinero que se abona cada período fijo (generalmente un año), con el objeto de reunir un capital o de pagar una deuda.

En el primer caso las anualidades se llaman *imposiciones* y en el segundo *amortizaciones*.

15. Imposiciones a interés compuesto. — Consideraremos únicamente las imposiciones que se pagan al comenzar cada período.

Designando con *a* la anualidad, y con A el capital que se desea reunir con dichas anualidades colocadas a interés compuesto durante n períodos, es evidente que: la primera anualidad, *a*, depositada al comenzar el primer período, está colocada a interés compuesto

durante n períodos; luego, su monto A_1 es, de acuerdo con la fórmula conocida:

$$A_1 = a(1+i)^n$$

La segunda anualidad, que también es a, está colocada solamente durante $(n-1)$ períodos; luego su monto A_2 es:

$$A_2 = a(1+i)^{n-1}$$

La tercera anualidad, a, está colocada durante $(n-2)$ períodos; luego su monto A_3 es:

$$A_3 = a(1+i)^{n-2}$$

y así siguiendo, la penúltima anualidad está colocada durante 2 períodos luego su A_{n-1} monto es:

$$A_{n-1} = a(1+i)^2$$

y la última anualidad, solamente durante un año; luego su monto A_n es:

$$A_n = a(1+i).$$

Por lo tanto, el capital reunido, o sea el monto total A, es la suma de todos estos montos parciales, es decir:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n$$

Reemplazando A_1 ; A_2 etc., por los valores hallados, se tiene:

$$A = a(1+i)^n + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \ldots + \ldots + a(1+i)^2 + a(1+i)$$

que podemos escribir, aplicando la propiedad conmutativa de la suma:

$$A = a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n.$$

Pero el segundo miembro es la suma de los n términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)$.

Recordando que la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica es:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

como en este caso el primer término, a, de la progresión es: $a(1 + i)$; la razón, q, es igual a $(1 + i)$, y la suma S es A, se tiene:

$$A = \frac{a(1 + i)\ [(1 + i)^n - 1]}{(1 + i) - 1}$$

y reduciendo en el denominador resulta:

$$A = \frac{a(1 + i)\ [(1 + i)^n - 1]}{i}$$

EJEMPLO:

¿Qué capital se conseguirá reunir abonando anualidades de 800 $ durante 20 años, al 3 %?

Aplicando la fórmula obtenida, se tiene:

$$A = \frac{800 \times 1{,}03\ [(1{,}03)^{20} - 1]}{0{,}03}.$$

El valor de $1{,}03^{20}$ (lo hemos obtenido mediante la tabla) es 1,806 111.

Luego; reemplazando

$$A = \frac{800 \times 1{,}03\ (1{,}806\,111 - 1)}{0{,}03}$$

$$A = \frac{800 \times 1{,}03 \times 0{,}806\,111}{0{,}03}$$

$$A = 22\,141{,}18\ .$$

Por lo tanto, el capital reunido es de: 22 141,18 \$.

16. De la fórmula que da el capital total o monto, se deducen las fórmulas de la anualidad y del tiempo.

Fórmula de la anualidad.

Siendo:

$$A = \frac{a(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}\ .$$

Pasando el divisor i y el factor $(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]$ al primer miembro, se tiene:

$$\frac{A\,i}{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]} = a$$

o sea:

$$\boxed{a = \frac{A\,i}{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}}$$

que es la fórmula que permite calcular la anualidad, conocidos: el monto o capital final, A; el tanto por uno, i, y el número de anualidades, n.

Fórmula del tiempo.

Siendo:

$$A = \frac{a(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Pasando el divisor i y el factor $a(1+i)$ al primer miembro, se tiene:

$$\frac{A\,i}{a(1+i)} = [(1+i)^n - 1]$$

o sea:

$$(1+i)^n - 1 = \frac{A\,i}{a\,(1+i)}\,.$$

Pasando el sustraendo 1 al segundo miembro:

$$(1+i)^n = \frac{A\,i}{a\,(1+i)} + 1$$

Reduciendo a común denominador, en el segundo miembro:

$$(1+i)^n = \frac{A\,i + a\,(1+i)}{a\,(1+i)}$$

Tomando logaritmos:

$$n \log(1+i) = \log[(A\,i) + a\,(1+i)] - \log a - \log(1+i)$$

de donde:

$$n = \frac{\log[A\,i + a\,(1+i)] - \log a - \log(1+i)}{\log(1+i)}$$

17. Amortizaciones. — Recordemos que el problema de las amortizaciones trata de establecer qué suma o anualidad, a, es necesario abonar periódicamente, para cubrir un préstamo o capital adeudado, C, prestado a interés compuesto, al tanto por uno, i, en n períodos.

Como se sabe, a interés compuesto, en las condiciones enunciadas, el capital se habrá convertido en:

$$M = C\,(1+i)^n \qquad [1]$$

Como las anualidades se abonan al terminar cada período, se tiene que: la primer anualidad o amortización, a, quedará impuesta durante (n — 1) períodos, y, por lo tanto, se transforma en:

$$A_1 = a\,(1+i)^{n-1}$$

La segunda queda impuesta durante (n — 2) períodos; luego, su monto A_2 es:

$$A_2 = a\,(1+i)^{n-2}$$

y así siguiendo, se llegaría a establecer que:

$$A_3 = a\,(1+i)^{n-3}$$

....

....

$$A_{n-1} = a\,(1+i)^{n-(n-1)} = a\,(1+i)$$

y finalmente la última anualidad no produce interés, y, por consiguiente:

$$A_n = a$$

La suma total abonada por el deudor es, pues:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n$$

$$\therefore \quad A = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + \ldots$$
$$+ a(1+i) + a$$

o bien:

$$A = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots$$
$$+ a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}\,.$$

Pero el segundo miembro es la suma de los n términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es a y cuya razón es

$(1+i)$. Por consiguiente, aplicando la fórmula que da la suma de todos los términos de una progresión geométrica, que es:

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Como en este caso la suma es A, resulta:

$$A = \frac{a\,[(1+i)^n - 1]}{(1+i) - 1}$$

o sea:

$$A = \frac{a\,[(1+i)^n - 1]}{i} \qquad [2]$$

Pero esta cantidad A debe coincidir con el monto M, que corresponde al capital prestado, establecido en la relación [1].

Luego, de [1] y [2]:

$$C\,(1+i)^n = \frac{a\,[(1+i)^n - 1]}{i} \qquad [3]$$

de donde:

$$\frac{C\,(1+i)^n\; i}{[(1+i)^n - 1]} = a$$

o sea:

$$\boxed{a = \frac{C\,i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}}$$

fórmula que expresa la amortización periódica a interés compuesto que corresponde a un capital C, al tanto por uno, i, durante n períodos.

18. Fórmula del capital. — Conocida la anualidad que puede abonarse y el tiempo, se calcula el préstamo que puede solicitarse a determinado interés compuesto.

De la expresión [3]:

$$C(1+i)^n = \frac{a[(1+i)^n - 1]}{i}$$

se deduce, despejando C:

$$\boxed{C = \frac{a[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}}$$

19. Fórmula del tiempo. — Conocido el préstamo, la razón y el importe de la anualidad, se calcula el número de períodos.

De la fórmula del capital:

$$C = \frac{a[(1+i)^n - 1]}{i(1+i)^n}$$

Efectuando la multiplicación en el numerador, se tiene:

$$C = \frac{a(1+i)^n - a}{i(1+i)^n}$$

Pasando el divisor $i(1+i)^n$ al primer miembro, como factor:

$$C\,i(1+i)^n = a(1+i)^n - a$$

Trasponiendo el primer término del segundo miembro al primero:

$$C\,i(1+i)^n - a(1+i)^n = -a$$

multiplicando ambos miembros por (-1)

$$a(1+i)^n - C\,i(1+i)^n = a$$

Sacando $(1 + i)^n$ factor común:

$$(1 + i)^n (a - C\,i) = a$$

Pasando el factor $(a - C\,i)$ al segundo miembro, como divisor:

$$(1 + i)^n = \frac{a}{a - C\,i}$$

Tomando logaritmos:

$$n \log (1 + i) = \log a - \log (a - C\,i)$$

Pasando $\log (1 + i)$ al segundo miembro, resulta:

$$n = \frac{\log a - \log (a - C\,i)}{\log (1 + i)}$$

que es la fórmula que da el número de períodos. Conocido el número de períodos y la duración de los mismos, se calcula el tiempo total.

Observación: Como en las imposiciones y amortizaciones el interés es compuesto, es necesario recordar que la razón está referida al tiempo correspondiente al período.

APLICACIONES.

1º Se solicita un préstamo de 35 000 $ a pagar en 10 años, al 5 % anual, en períodos de un año. Calcular el valor de la amortización.

Aplicamos la fórmula:

$$a = \frac{C\,i\,(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}.$$

Siendo:

$$C = 35\,000 \,\$ \quad ; \quad i = 0{,}05 \quad ; \quad n = 10$$

es:

$$a = \frac{35\,000 \times 0{,}05\,(1 + 0{,}05)^{10}}{(1 + 0{,}05)^{10} - 1} \,. \qquad [1]$$

Calculamos $(1 + 0{,}05)^{10}$ por logaritmos:

$$\log (1 + 0{,}05)^{10} = \log 1{,}05^{10} = 10 \log 1{,}05$$

$$\log (1 + 0{,}05)^{10} = 10 \times 0{,}021\,19 = 0{,}211\,90$$

$$\therefore \quad (1 + 0{,}05)^{10} = \text{antilog}\ 0{,}211\,90$$

$$(1 + 0{,}05)^{10} = 1{,}628\,9$$

Reemplazamos en [1]:

$$a = \frac{35\,000 \times 0{,}05 \times 1{,}628\,9}{1{,}628\,9 - 1}$$

$$a = \frac{35\,000 \times 0{,}05 \times 1{,}628\,9}{0{,}628\,9} \,.$$

Tomando logaritmos:

$$\log a = \log 35\,000 + \log 0{,}05 + \log 1{,}628\,9 + \text{colog}\ 0{,}628\,9$$

y como: $\log 35\,000 = 4{,}544\,07$

$+ \log 0{,}05 = \overline{2},698\,97$

$\log 1{,}628\,9 = 0{,}211\,90$

$\log 0{,}628\,9 = \overline{1},798\,58 \ \therefore\ \text{colog}\ 0{,}628\,9 = 0{,}201\,42$

es: $\log a = 3{,}656\,36$

$\therefore\ a = \text{antilog}\ 3{,}656\,36$

y por lo tanto: $a = 4\,532{,}7$

Luego la amortización es de 4 532,70 $.

2º Un préstamo de 28 000 $ debe pagarse en anualidades de 3 354 $, al 6 % anual en períodos de 1 año. ¿Cuánto tiempo tardará en pagarse la deuda?

Aplicamos la fórmula:

$$n = \frac{\log a - \log (a - C\,i)}{\log (1 + i)}$$

Siendo:

$$a = 3\,354\ \$ \quad ; \quad C = 28\,000\ \$ \quad ; \quad i = 0{,}06$$

y reemplazando se tiene:

$$n = \frac{\log 3\,354 - \log (3\,354 - 28\,000 \times 0{,}06)}{\log (1 + 0{,}06)}$$

$$n = \frac{\log 3\,354 - \log 1\,674}{\log 1{,}06}$$

Haciendo el cálculo de los logaritmos anteriores, y reemplazando:

$$n = \frac{3{,}525\,56 - 3{,}223\,76}{0{,}025\,31}$$

$$n = \frac{0{,}301\,80}{0{,}025\,31}$$

$$n = 12\,.$$

Como los períodos son anuales, se tardará 12 años en pagar la deuda.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN*.

1º) ¿Cuál es el monto correspondiente a un capital de 200 $, colocado a interés compuesto al 3 % anual durante 2 años, capitalizando anualmente?

Respuesta: 212,18 $.

2º) Hallar el monto correspondiente a 85 000 $, colocados a interés compuesto al 5 % anual, durante 15 años, capitalizando anualmente.

Respuesta: 176 713 $.

3º) ¿A cuánto ascenderá un capital de 2 500 $, colocado a interés compuesto, al 6 % anual, al cabo de $1\frac{1}{2}$ años, si los intereses se capitalizan semestralmente?

Respuesta: 2 731,88 $.

4º) Hallar el monto correspondiente a 920 $, colocado a interés compuesto al 4 % anual, durante 3 años, capitalizando cada semestre.

Respuesta: 1 036,07 $.

5º) ¿Cuál es el monto correspondiente a un capital de 25 000 $, colocado a interés compuesto al 8 % anual, durante 10 años 9 meses, capitalizando trimestralmente?

Respuesta: 58 578,57 $.

6º) ¿Cuál es el monto correspondiente a 12 520 $ colocados a interés compuesto al 9 % anual, durante 5 años 4 meses, capitalizando cuatrimestralmente?

Respuesta: 20 092,72 $.

7º) ¿Qué interés compuesto han producido 36 000 $ colocados al 2 % semestral, durante 5 años, capitalizando anualmente?

Respuesta: 7 798 $.

8º) ¿Qué interés compuesto han producido 59 500 $ colocados al 6 % anual, durante 20 años, capitalizando semestralmente?

Respuesta: 134 640,90 $.

* Los resultados pueden diferir de los que figuran en el texto, en las cifras de los centavos, por adopción de distintos criterios en el redondeo de los decimales.

9º) ¿Qué interés compuesto han producido 15 500 $ colocados al 10 % anual, durante $15\frac{1}{2}$ años, capitalizando cada semestre?

Respuesta: 54 843,33 $.

10º) ¿Qué interés compuesto han producido 42 000 $ colocados al 12 % anual, durante 6 años y 3 meses, capitalizando cada trimestre?

Respuesta: 45 952 $.

11º) ¿Cuál es el capital que, colocado a interés compuesto al 6 % anual, durante 30 años se convirtió en 416 520 $, capitalizando anualmente?

Respuesta: 72 500 $.

12º) ¿Qué capital, colocado a interés compuesto al 4 % semestral, durante 12 años produjo un monto de 50 358 $, capitalizando cada año?

Respuesta: 20 000 $.

13º) ¿Qué capital, colocado a interés compuesto al 10 % anual, durante $6\frac{1}{2}$ años produjo un monto de 105 600 $, capitalizando cada semestre?

Respuesta: 56 000 $.

14º) ¿Cuál es el capital que colocado a interés compuesto al 12 % anual, durante $10\frac{1}{2}$ años, se convirtió en 116 418 $, capitalizando cada trimestre?

Respuesta: 33 631 $.

15º) ¿Qué capital, colocado a interés compuesto al 8 % anual, durante $7\frac{1}{2}$ años, se convirtió en 63 025,71 $? (Capitalización semestral).

Respuesta: 35 000 $.

16º) Hallar el tanto por uno al que hay que colocar un capital de 10 000 $, para que al cabo de 5 años produzca un monto de 12 763 $.

Respuesta: 0,05.

17º) Calcular el tanto por uno al que hay que colocar un capital de 64 000 $, para que al cabo de 10 años produzca un monto de 78 015 $.

Respuesta: 0,02.

18º) Calcular el tanto por uno al que hay que imponer un capital a interés compuesto para que se triplique al cabo de 15 años.

Respuesta: 0,076.

19º) Calcular el tanto por ciento al que hay que colocar un capital de 4 850 $, para que al cabo de 18 años produzca un monto de 8 257,80 $.

Respuesta: 3 %.

20º) Hallar el tanto por ciento al que hay que imponer un capital de 35 000 $ para que produzca un monto de 44 284 $ al cabo de 6 años.

Respuesta: 4 %.

21º) ¿Durante cuánto tiempo un capital de 3 960 $, colocado a interés compuesto, al 6 % anual, produjo un monto de 7 969,30 $, siendo el período de capitalización anual?

Respuesta: 12 años.

22º) ¿Durante cuánto tiempo, un capital de 38 000 $, colocado a interés compuesto, al 4 % anual, produjo un monto de 76 970 $, capitalizando anualmente?

Respuesta: 18 años.

23º) ¿En cuánto tiempo un capital de 40 000 $, colocado a interés compuesto al 4 % anual, se transformó en 59 437,14 $, capitalizando cada semestre?

Respuesta: 10 años.

24º) ¿Cuántos años necesita un capital de 10 000 $, colocado a interés compuesto, al 5 % semestral, capitalizando cada semestre, para transformarse en 33 864,61 $?

Respuesta: $12\frac{1}{2}$ años.

25º) ¿Qué capital se conseguirá reunir abonando anualidades de 300 $ durante 15 años al 4 %?

Respuesta: 6 243,85 $.

26º) ¿Qué capital se conseguirá reunir abonando anualidades de 120 $ durante 40 años al 5 %?

Respuesta: 15 222,06 $.

27º) Si se deposita al principio de cada año 450 $, a interés compuesto del 6 %, ¿qué capital se tendrá al cabo de 25 años?

Respuesta: 26 178,56 $.

28º) ¿Qué capital se conseguirá reunir abonando anualidades de 1 020 $ durante 32 años al 3 %?

Respuesta: 55 177,16 $.

Calcular el capital que podrá reunirse abonando, a interés compuesto:

1º) Anualidades de 102 $, durante 24 años, al 3 % anual.

2º) Anualidades de 510 $, durante 16 años, al 6 % anual.

3º) Anualidades de 1 000 $, durante 10 años, al 5 % anual.

4º) Anualidades de 2 000 $, al 4 % anual, durante 15 años.

5º) Anualidades de 800 $, al 5 % anual, durante 20 años.

6º) Cuotas anuales de 1 200 $, durante 18 años, al 3 % anual.

Verificar los seis problemas anteriores, considerando como incógnita:

1º) la anualidad.

2º) el tiempo.

Amortizaciones.

1º) Un préstamo de 25 000 $ debe reembolsarse en cuotas anuales, durante 15 años. Calcular la amortización, siendo la tasa del interés compuesto del 4 %.

Respuesta: 2 248,83 $.

2º) ¿Qué amortización corresponde abonar anualmente para cubrir un préstamo de 50 000 $ en 20 años, calculándose la tasa del interés compuesto en 3 % anual?

Respuesta: 3 518,04 $.

3º) Un préstamo de 32 000 $ ha sido cubierto en 33 amortizaciones anuales. Calcúlese dicha amortización, si la tasa de interés compuesto es de 5 % anual.

Respuesta: 1 999,65 $.

4º) ¿A cuánto asciende la amortización anual para reembolsar en 20 años, un capital de 18 000 $, al 6 % anual? (Interés compuesto).

Respuesta: 1 569,18 $.

5º) Calcúlese la amortización anual que debe abonarse para reembolsar 45 000 $, al 4 % anual, en 25 años?

Respuesta: 2 880,89 $.

6º) Para cubrir una deuda de 24 000 $, se abonan cuotas anuales durante 24 años. ¿A cuánto asciende la amortización si se calcula en 5 % la tasa del interés compuesto?

Respuesta: 1 739,27 $.

Resolver los seis problemas anteriores considerando como incógnita:

1º) el tiempo.

2º) el capital.

CAPÍTULO VI.

NÚMEROS COMPLEJOS.

1. En el campo de los números reales, los números negativos carecen de logaritmos y de raíces de índice par. Así, cuando se conocen únicamente los números reales, no tiene interpretación, por ejemplo, $\sqrt{-25}$, pues no hay ningún número que elevado al cuadrado dé el número -25. Para interpretar esas operaciones se crearon los números complejos imaginarios.

Estos nuevos números que amplían el campo de los números ya conocidos, no se definen arbitrariamente, sino de modo tal que las operaciones con ellos gocen de las mismas propiedades que las correspondientes operaciones con números reales. Recordemos que esto constituye el principio de permanencia de las leyes formales de la Aritmética.

Entre estos nuevos números complejos imaginarios se define la *unidad imaginaria* como la raíz cuadrada positiva de -1, y se designa con la letra i, es decir:

$$i = +\sqrt{-1}$$

Y como según hemos dicho, en este nuevo campo de números deben subsistir las definiciones dadas para las operaciones conocidas, de la igualdad anterior, de acuerdo con la definición de raíz cuadrada, resulta que:

$$i^2 = -1$$

Antes de estudiar los números complejos imaginarios en general, obsérvese que admitida esta definición y la permanencia de las propiedades ya estudiadas se puede atribuir un significado a las raíces cuadradas de radicando negativo, por ejemplo:

$$\sqrt{-36}$$

En efecto, el radicando -36 puede considerarse como el producto de $36 \times (-1)$, luego:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)}$$

y aplicando al segundo miembro la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación, se tiene:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \times \sqrt{-1} \qquad [1]$$

Como, según la definición, $+\sqrt{-1} = i$, y $\sqrt{36} = \pm 6$, reemplazando en [1], se tiene:

$$\sqrt{-36} = \pm\ 6i$$

Es decir, que la raíz cuadrada de -36 admite dos resultados de igual valor absoluto y distinto signo, que son: el número $+6i$ y el número $-6i$.

Análogamente:

$$\sqrt{-5} = \pm\ i\sqrt{5}$$

$$\sqrt{-\frac{9}{4}} = \pm\ \frac{3}{2}i$$

2. **Números complejos imaginarios.** —Así como un par de números enteros a y b, dados en ese orden, determinan el número fraccionario $\frac{a}{b}$, del cual el primer número, a, es el numerador y el segundo, b, es el denominador: análogamente, un par de números reales a y b, dados en ese orden y donde $b \neq 0$, definen un *número complejo imaginario* que se representa (a/b), del cual el primer número, a, se llama *componente real*, y el segundo número, b, *componente imaginaria*.

Así, por ejemplo, en los números complejos imaginarios:

$$(2\ /\ 3)$$

la componente real es 2 y la componente imaginaria es 3.

$\left(-1 / \frac{4}{5}\right)$ la componente real es -1 y la componente imaginaria es $\frac{4}{5}$.

$(\sqrt{2} / -10)$ la componente real es $\sqrt{2}$ y la componente imaginaria es -10.

$(-0{,}5 / -1)$ la componente real es $-0{,}5$ y la componente imanaria es -1.

Otra notación: El número complejo imaginario (a/b) se indica también por la notación: $(a\ ;\ b)$.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{2}{3}\ ;\ 5\right) \text{ representa el número } \left(-\frac{2}{3} / 5\right)$$

3. **Números complejos.** — El conjunto de los números reales y de los complejos imaginarios recibe el nombre de números complejos, es decir, que podemos completar, como sigue, el cuadro de los números hasta ahora estudiados:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\textit{naturales}\\ \textit{negativos}\end{array}\right\}\textit{enteros}\\ \qquad\textit{fraccionarios}\end{array}\right\}\textit{racionales}\\ \qquad\qquad\textit{irracionales}\end{array}\right\}\textit{reales}\\ \qquad\qquad\qquad\textit{complejos imaginarios}\end{array}\right\}\text{COMPLEJOS}$$

4. Los números reales pueden considerarse como un caso particular de números complejos de componente imaginaria cero. Así, el número 9 puede representarse como el número complejo que tiene componente real 9 y componente imaginaria 0 es decir:

$$9 = (9\ ;\ 0)$$

Del mismo modo, la unidad real 1 se representa por el complejo de componente real 1 y componente imaginario 0, es decir:

$$1 = (1\,;\,0)$$

Análogamente

$$-4 = (-4\,;\,0)$$

y

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\,;\,0\right)$$

5. Se llama *número imaginario puro* el número complejo imaginario cuya componente real es cero. Así, son números imaginarios puros

$$(0\,;7) \quad ; \quad \left(0\,;\,\frac{3}{5}\right) \quad ; \quad (0\,;-0{,}8)\,.$$

Entre estos números el que tiene por componente imaginaria la unidad es el que hemos llamado unidad imaginaria, es decir: $(0\,;\,1) = i$; la unidad imaginaria es el número complejo que tiene la componente real 0 y la componente imaginaria 1.

Los números imaginarios puros se representan por su componente imaginaria seguida de la unidad i, es decir:

$$(0\,;7) = 7i \quad ; \quad \left(0\,;\,\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}i \quad ; \quad (0\,;-0{,}8) = -0{,}8\,i \quad ;$$

$$(0\,;\,-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\,i.$$

6. **Igualdad de números complejos.** — Como todo número complejo tiene dos componentes, la real y la imaginaria, se admite como definición, que un número complejo es igual a otro cuando la componente real y la componente imaginaria son, respectivamente, iguales a las del otro.

En símbolos:

$$\text{es:} \qquad (a\,/\,b) = (c\,/\,d)$$

$$\text{si se verifica: } \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Esta igualdad de números complejos goza, como toda igualdad, de los caracteres idéntico, recíproco y transitivo.

7. Suma de números complejos. — *Se llama suma de dos o más números complejos al complejo que tiene como componente real la suma de las componentes reales y como componente imaginaria la suma de las componentes imaginarias de los números sumandos.*

En símbolos:

$$(a\,;b) + (c\,;d) + (p\,;q) = [\,(a + c + p)\,;(b + d + q)\,]$$

EJEMPLO 1º:

$$(3\,;2) + (4\,;1) + (5\,;7) = [(3 + 4 + 5)\,;(2 + 1 + 7)] = (12\,;10)$$

EJEMPLO 2º:

$$\left(\frac{3}{4}\,;-2\right)+\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right)=\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right);\left(-2+\frac{2}{3}\right)\right]=\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{4}{3}\right)$$

8. Suma de un número real y de uno imaginario puro. — Esta suma es un caso particular de la suma de complejos, pues, teniendo en cuenta que los números reales pueden considerarse como complejos de componente imaginaria cero: $(a\,;0)$, y los números imaginarios puros como complejos de componente real nula: $(0\,;b)$, resulta:

$$(a\,;0) + (0\,;b) = [(a + 0)\,;\,(0 + b)] = (a\,;b)$$

Luego, puede definirse:

La suma de un número real y de uno imaginario puro es el número complejo que tiene por componente real el número real y por componente imaginaria la del imaginario puro.

o sea:

$$(a\,;0) + (0\,;b) = (a\,;b) \qquad [1]$$

pero como:

$$(a\,;0) = a$$

y

$$(0\,;b) = b\,i$$

sustituyendo en [1], resulta:

$$a + b\,i = (a\,;b) \qquad [2]$$

EJEMPLOS:

$$(-\sqrt{3}\,;\ 0) + (0\,;-4) = (-\sqrt{3}\,;\ -4)$$

$$\frac{2}{3} + 5\,i = \left(\frac{2}{3}\,;5\right)$$

$$-0{,}4 + \left(-\frac{1}{2}\,i\right) = \left(-0{,}4\,;-\frac{1}{2}\right)$$

De este caso particular de suma surge la *representación de los números complejos en forma binómica*, pues aplicando el carácter transitivo a la igualdad [2] se tiene:

$$(a\,;b) = a + b\,i$$

es decir, que todo número complejo puede representarse como el binomio de su componente real más el imaginario puro que determina su componente imaginaria.

EJEMPLOS:

$$(\sqrt{7}\,;\ 0{,}3) = \sqrt{7} + 0{,}3\,i$$

$$\left(\frac{1}{3};-2\right)=\frac{1}{3}-2i$$

$$\left(-\frac{4}{5};1\right)=-\frac{4}{5}+i$$

$$(1;-1)=1-i$$

NOTA: Esta forma binómica, de los números complejos, se llama también cartesiana, pues existe otra forma binómica polar, que se estudia en cursos superiores.

9. Teniendo en cuenta la definición de suma de complejos y la representación de éstos en forma binómica, es inmediato que:

$$(a+bi)+(c+di)+(p+qi)=(a+c+p)+(b+d+q)i$$

EJEMPLO 1º:

$$(2+3i)+(1-i)+(-5+4i)=(2+1-5)+(3-1+4)i=$$
$$=-2+6i$$

EJEMPLO 2º:

$$\left(\frac{5}{6}-1{,}2\,i\right)+\left(\frac{2}{3}+0{,}4\,i\right)=\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)+\left(-1{,}2+0{,}4\right)i=$$
$$=\frac{3}{2}-0{,}8\,i$$

10. **Complejos conjugados.** — Dos números complejos se dicen *conjugados* cuando tienen las componentes reales iguales y las componentes imaginarias de igual valor absoluto pero de distinto signo.

Así, por ejemplo, son números complejos conjugados:

$$4+5i \quad \text{y} \quad 4-5i$$

pues, tienen la misma componente real 4 y las componentes imaginarias de igual valor absoluto 5, pero en uno con signo más y en el otro con signo menos. También son números complejos conjugados:

$$\left(-\frac{1}{2}+0{,}3\,i\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2}-0{,}3\,i\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}\,i\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\,i\right)$$

$$(1+i) \quad \text{y} \quad (1-i)$$

y en general, teniendo en cuenta que si a y b son las componentes de uno de los números, las del conjugado deben ser a y $-$b, dos complejos conjugados quedan representados mediante la notación.

$$a+b\,i \qquad \text{y} \qquad a-b\,i$$

11. Suma de complejos conjugados. — Sean dos números complejos conjugados, en general:

$$a+b\,i \qquad \text{y} \qquad a-b\,i$$

De acuerdo con la definición de suma de complejos, se tiene que:

$$(a+b\,i)+(a-b\,i)=(a+a)+(b-b)\,i \qquad [1]$$

pero:

$$a+a=2\,a$$

y

$$b-b=0$$

luego, sustituyendo en [1]:

$$(a+b\,i)+(a-b\,i)=2\,a$$

es decir, que:

La suma de dos complejos conjugados da por resultado un número real que es el duplo de la componente real.

EJEMPLO 1º:

$$(8 + 0{,}7\,i) + (8 - 0{,}7\,i) = 16$$

EJEMPLO 2º:

$$(-\sqrt{5} - 4\,i) + (-\sqrt{5} + 4\,i) = -2\sqrt{5}$$

12. Resta de números complejos. — Siendo la resta la operación inversa de la suma, y teniendo en cuenta la definición de suma de complejos, resulta que: *La diferencia entre dos números complejos es el complejo que tiene por componentes real e imaginaria, respectivamente, la diferencia entre las componentes reales y entre los componentes imaginarias del minuendo y sustraendo.*

En símbolos:

$$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)\,i\,.$$

EJEMPLO 1º:

$$(11 + 5\,i) - (7 + 2\,i) = (11 - 7) + (5 - 2)\,i = 4 + 3\,i$$

EJEMPLO 2º:

$$(-3 + i) - (0{,}5 - 5\,i) = (-3 - 0{,}5) + (1 - (-5))\,i =$$
$$= -3{,}5 + 6\,i$$

EJEMPLO 3º:

$$\left(0{,}2 + \frac{7}{9}\,i\right) - \left(-3 - \frac{4}{9}\,i\right) = \left(0{,}2 - (-3)\right) + \left[\frac{7}{9} - \left(-\frac{4}{9}\right)\right] i =$$
$$= 3{,}2 + \frac{11}{9}\,i$$

EJEMPLO 4º:

$$\left(\frac{1}{2}-i\right)-\left(\frac{3}{4}-2i\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(-1-(-2)\right)i=-\frac{1}{4}+i.$$

13. Resta de complejos conjugados. — Teniendo en cuenta las definiciones dadas, resulta que al restar dos complejos conjugados, por ejemplo: $(a+bi)$ y $(a-bi)$, como las componentes reales son iguales, la diferencia de las mismas es cero. En efecto: $a-a=0$; luego, el número resultado tendrá componente real nula, es decir, resulta un número imaginario puro.

EJEMPLO 1º:

$$(4+5i)-(4-5i)=(4-4)+(5-(-5))i$$

pero:

$$4-4=0 \quad ; \quad 5-(-5)=5+5=10$$

luego:

$$(4+5i)-(4-5i)=10i.$$

EJEMPLO 2º:

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+6i)-(-\sqrt{3}-6i) &= [-\sqrt{3}-(-\sqrt{3})]+\\ &+[6-(-6)]\,i\\ &=(-\sqrt{3}+\sqrt{3})+(6+6)\,i=\\ &=0+12\,i=12\,i\end{aligned}$$

EJEMPLO 3º:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right)i=$$

$$=0-\frac{6}{5}i=-\frac{6}{5}i$$

EJEMPLO 4º:

$$(1-i)-(1+i)=(1-1)+(-1-1)\,i=0-2\,i=-2\,i.$$

14. Multiplicación de números complejos. — Antes de considerar la multiplicación de dos números complejos, en general, recordemos que hemos definido la unidad imaginaria i tal que su cuadrado es igual a -1, es decir:

$$i^2=-1$$

o lo que es igual:

$$i\cdot i=-1$$

es decir, que: *el producto de la unidad imaginaria por sí misma es igual a* -1.

Consideremos ahora dos complejos cualesquiera dados en forma binómica, por ejemplo: $(a+bi)$ y $(c+di)$. Si la multiplicación de números complejos goza de las mismas propiedades que la multiplicación de números reales, multiplicar estos complejos se reduce a multiplicar dos binomios sumas; luego, tendremos que multiplicar cada término del primero por cada término del segundo y sumar los productos parciales, es decir:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bic+adi+bidi \qquad [1]$$

pero:

$$bidi=bdi^2 \quad \text{y como} \quad i^2=-1$$

$$bidi=bd\,(-1)=-bd$$

luego, sustituyendo en [1] el último término por el valor hallado:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bic+adi-bd$$

sacando i factor común en el segundo y tercer términos, se tiene:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+i(bc+ad)-bd$$

Aplicando la propiedad conmutativa y asociativa:

$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (b\,c + a\,d)\,i$$

es decir, que el producto es un complejo de componente real $(a\,c - b\,d)$ y de componente imaginaria $(b\,c + a\,d)$. Luego, de acuerdo con este resultado, podemos enunciar:

El producto de dos números complejos es el complejo que tiene por componente real el producto de las componentes reales menos el producto de las componentes imaginarias de los números dados, y por componente imaginaria la suma de los productos de la componente real de cada uno de los complejos dados por la componente imaginaria del otro.

En la práctica puede obtenerse el producto de complejos aplicando la regla, pero es más cómodo expresar los números en forma binómica y multiplicar las dos sumas según se procedió en el ejemplo literal anterior.

EJEMPLO 1º:

Multiplicar:

$$(3 + 5\,i)\ (10 + 2\,i)$$

Si se aplica la regla:

$$(3 + 5\,i) \cdot (10 + 2\,i) = (3 \times 10 - 5 \times 2) + (3 \times 2 + 5 \times 10)\,i =$$

$$= (30 - 10) + (6 + 50)\,i = 20 + 56\,i\,.$$

EJEMPLO 2º:

Multiplicar:

$$\left(\frac{2}{3} + 4\,i\right) \cdot \left(1 - 2\,i\right)$$

Multiplicándolos como binomios, se tiene:

$$\left(\frac{2}{3}+4i\right)\cdot\left(1-2i\right)=\frac{2}{3}\times 1+4i\,1-\frac{2}{3}\times 2i-4i\,2i=$$

$$=\frac{2}{3}+4i-\frac{4}{3}i-8i^2=$$

$$=\frac{2}{3}+4i-\frac{4}{3}i+8=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+8\right)+\left(4i-\frac{4}{3}i\right)=$$

$$=\frac{26}{3}+\frac{8}{3}i\,.$$

EJEMPLO 3º:

Multiplicar:

$$\left(-\frac{1}{2}-i\right)\cdot\left(2+4i\right)$$

Multiplicándolos como binomios, se tiene:

$$\left(-\frac{1}{2}-i\right)\cdot\left(2+4i\right)=-\frac{1}{2}\times 2-2i-\frac{1}{2}\times 4i-i\times 4i=$$

$$=-1-2i-2i-4i^2=$$

$$=-1-2i-2i+4=$$

$$=\quad 3-4i\,.$$

EJEMPLO 4º:

Multiplicar:

$$(0{,}2+3i)\cdot(-4i)$$

En estos casos en que una componente de uno de los factores es cero, se halla el producto aplicando la multiplicación de una suma por un número.

$$(0{,}2 + 3i) \cdot (-4i) = -0{,}2 \times 4i - 3i \times 4i =$$

$$= -0{,}8i - 12i^2 = -0{,}8i + 12 =$$

$$= 12 - 0{,}8i .$$

15. Producto de complejos conjugados. — Consideremos ahora los complejos conjugados $(a + bi)$ y $(a - bi)$, y hallemos su producto:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = aa + b\,i\,a - abi - bi\,bi \qquad [1]$$

pero:

$$aa = a^2$$

$$bia - abi = 0$$

$$-bi\,bi = -b^2 i^2 = -b^2(-1) = b^2$$

luego, sustituyendo en [1]

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Es decir, que: *El producto de dos complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de las dos componentes.*

EJEMPLO 1º:

$$(\sqrt{3} + 2i) \cdot (\sqrt{3} - 2i) = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$$

EJEMPLO 2º:

$$\left(-\frac{2}{5} - i\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} + i\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2 = \frac{4}{25} + 1 = \frac{29}{25}$$

16. División de números complejos. — Supongamos tener que efectuar la división:

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

Para evitar el número imaginario en el divisor, se multiplican dividendo y divisor por el complejo conjugado del divisor, en este caso por $(c - di)$, luego:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \qquad [1]$$

Ahora bien, el producto del numerador es:

$$(a + bi) \cdot (c - di) = ac + bic - adi - b\,di^2 =$$
$$= ac + bic - adi + bd =$$
$$= (ac + bd) + (bc - ad)\,i$$

y como los factores del denominador son complejos conjugados, su producto es:

$$(c + di) \cdot (c - di) = c^2 + d^2$$

Luego, sustituyendo en [1] el dividendo y divisor por los valores hallados, se tiene:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2}$$

El procedimiento que hemos seguido es general, es decir, que: *Para dividir dos números complejos se multiplican el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor y luego se efectúan las operaciones indicadas.*

Ejemplo 1º:

$$\frac{5 - 2i}{4 + 3i}$$

El conjugado del divisor es $4 - 3i$; luego, multiplicamos por él, dividendo y divisor:

$$\frac{5-2i}{4+3i} = \frac{(5-2i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} = \frac{20-8i-15i+6i^2}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{14-23i}{16+9} = \frac{14-23i}{25} = \frac{14}{25} - \frac{23}{25}i\,.$$

Ejemplo 2º:

$$\frac{6+3i}{2+i}$$

En este caso, el conjugado del divisor es $2 - i$; luego, multiplicando por él, dividendo y divisor, se tiene:

$$\frac{6+3i}{2+i} = \frac{(6+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{12+6i-6i-3i^2}{2^2+1^2} =$$

$$= \frac{15+0i}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$$

Ejemplo 3º:

$$\frac{\frac{1}{2}+i}{-4i}$$

En este caso, el divisor es un número imaginario puro, es decir, de componente real 0; luego, su conjugado será ese mismo imaginario puro, cambiado de signo, o sea: $+4i$.

Luego:

$$\frac{\frac{1}{2}+i}{-4i} = \frac{\left(\frac{1}{2}+i\right)4i}{(-4i)\,4i} = \frac{\frac{1}{2}\times 4i+4i^2}{4^2} = \frac{2i-4}{16}$$

y, simplificando por 2, resulta:

$$\frac{i-2}{8}=\frac{-2+i}{8}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}i$$

17. **Potencias de números complejos.** — Primeramente calcularemos las sucesivas potencias de la unidad imaginaria, i.

Como según ya hemos dicho, en las operaciones con estos números se conservan las definiciones y propiedades de que gozan cuando se aplican a números reales, resulta que, como la potencia cero de todo número no nulo es igual a 1, es:

$$i^0 = 1$$

Además, por carácter idéntico: $i = i$

y, según ya hemos visto: $i^2 = -1$

A i^3 podemos considerarla como el producto $i^2 \cdot i$; sustituyendo i^2 por su valor -1, se tiene:

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i$, o sea: $i^3 = -i$.

A i^4 podemos considerarla como el producto $i^2 \cdot i^2$; sustituyendo estas potencias por sus valores, se tiene:

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, o sea: $i^4 = 1$.

A i^5 puede considerarse como el producto $i^4 \cdot i$, pero $i^4 = 1$,

luego: $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, o sea: $i^5 = i$.

Del mismo modo i^6 podemos considerarla como el producto $i^4 \cdot i^2$, pero: $i^4 = 1$ e $i^2 = -1$, luego:

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\,(-1) = -1$, o sea: $i^6 = -1$

y así siguiendo, resultan las sucesivas potencias de i.

A continuación se indican las 13 primeras potencias de i.

$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
		$i^{12} = 1$

Se observa que a partir de la cuarta potencia comienzan a repetirse los valores ordenadamente.

Pasemos ahora a considerar las potencias de un número complejo cualquiera. Dando a un número complejo la forma binómica $(a + bi)$, el cuadrado, el cubo y, en general, la potencia enésima del mismo se obtienen respectivamente como el cuadrado, cubo o potencia enésima de un binomio. El resultado es siempre otro número complejo, al que se llega reemplazando i^2, i^3, etc., por sus valores y reduciendo los términos semejantes.

EJEMPLO 1º:

$$(3 + 5i)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5i + (5i)^2$$
$$= 9 + 30i - 25 = -16 + 30i$$

EJEMPLO 2º:

$$\left(\frac{1}{3} + 2i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 2i + 3 \times \frac{1}{3}(2i)^2 + (2i)^3 =$$

$$= \frac{1}{27} + 3 \times \frac{1}{9} \times 2i + 3 \times \frac{1}{3} \times 4i^2 + 2^3\, i^3$$

reemplazando i^2 por su valor -1; e i^3 por su valor $-i$, y simplificando, se tiene:

$$\left(\frac{1}{3} + 2i\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{2}{3}i + 4(-1) + 8(-i)$$

o sea:

$$\left(\frac{1}{3} + 2i\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{2}{3}i - 4 - 8i$$

y reuniendo los términos reales y los imaginarios:

$$\left(\frac{1}{3} + 2i\right)^3 = \left(\frac{1}{27} - 4\right) + \left(\frac{2}{3} - 8\right)i$$

es decir:

$$\left(\frac{1}{3} + 2i\right)^3 = -\frac{107}{27} - \frac{22}{3}i\,.$$

18. **Raíz cuadrada.** — Al comenzar este capítulo hemos recordado que las raíces de índice par de números negativos carecen de sentido en el campo de los números reales, y hemos visto también en un ejemplo, $\sqrt{-36}$, cómo los números complejos resuelven este problema, pues las raíces en este caso son los números imaginarios puros $6i$ y $-6i$. En general, un número negativo admite dos raíces cuadradas, que son números imaginarios puros de igual valor absoluto y distinto signo, que se obtienen multiplicando por la unidad imaginaria i las raíces cuadradas del valor absoluto del número dado.

Así:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\; i = \begin{cases} +\sqrt{a}\; i \\ -\sqrt{a}\; i \end{cases}$$

Ejemplo 1º:

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64}\; i = \pm\, 8i$$

EJEMPLO 2º:

$$\sqrt{-\frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{16}{49}}\, i = \begin{cases} \frac{4}{7} i \\ -\frac{4}{7} i \end{cases}$$

EJEMPLO 3º:

$$\sqrt{-0{,}25} = \sqrt{0{,}25}\, i = \begin{cases} 0{,}5\, i \\ -0{,}5\, i \end{cases}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

1º) Escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

$(0\,;3)$; $(-1\,;2)$; $\left(\frac{1}{2};-1\right)$; $\left(\frac{3}{4};1\right)$; $(0\,;-1)$; $(-1\,;1)$; $(0{,}5\,;-3)$;

$\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$; $(-0{,}4\,;-0{,}7)$; $\left(\sqrt{2};-10\right)$; $\left(-1;\sqrt{3}\right)$;

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\sqrt{7}\right)$; $(1\,;2)$; $(3\,;-1)$; $\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{3}\right)$

Dar ejemplos de números imaginarios puros.

Efectuar las siguientes sumas:

1º). $(4+2\,i)+(2+3\,i)$

2º). $(1+5\,i)+(10+7\,i)$

3º). $\left(\frac{1}{2}+3\,i\right)+\left(1+\frac{3}{4}\,i\right)$

4º) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\,i\right)$

5º) $(3+4\,i)+(5+2\,i)+(1+i)$

6º) $\left(\frac{1}{2}+3\,i\right)+\left(\frac{1}{4}+4\,i\right)$

7º) $\left(\frac{3}{4};2\right)+\left(\frac{3}{4};-2\right)$

8º) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)$

9º) $\left(-2;\frac{1}{3}\right)+\left(-2;-\frac{1}{3}\right)$

10º) $\left(-\frac{3}{2};-2\right)+\left(-\frac{3}{2};2\right)$ 11º) $\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}i\right)$

12º) $(-0{,}8-i)+(2-0{,}4\,i)$ 13º) $\left(-\frac{1}{2}+6\,i\right)+\left(0{,}5-\frac{1}{2}i\right)$

14º) $\left(-\frac{3}{4}-i\right)+(-0{,}75+i)$ 15º) $\left(1-\sqrt{2\,i}\right)+\left(-2+3\sqrt{2\,i}\right)$

16º) $\left(-\sqrt{3}+i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}i\right)$

17º) $(0{,}4-0{,}1\,\text{i})+\left(-0{,}81-\frac{3}{10}i\right)$

18º) $\left(2+\frac{4}{5}i\right)+5\,i$ 19º) $4\,i+\left(\frac{1}{4}+0{,}3\,i\right)$

20º) $\sqrt{2}\,\text{i}+\left(1+\sqrt{2\,i}\right)$ 21º) $(-1+i)+(2-i)$

22º) $\left(\frac{2}{5}-3\,i\right)+\left(\frac{7}{10}-3\,i\right)$ 23º) $(3\,i)+(8\,i)+(-5\,i)$

24º) $\left(\frac{4}{3}i\right)+\left(\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{5}{4}i\right)$ 25º) $\left(\frac{1}{2}i\right)+(-i)+\left(-\frac{3}{4}i\right)$.

26º) $(5\,i)+\left(-\frac{1}{3}i\right)+\left(-\frac{4}{5}i\right)+(3\,i)$

27º) $\left(2+\frac{4}{5}i\right)+\left(\frac{1}{2}-3\,i\right)+\left(-5+\frac{2}{3}i\right)$

28º) $\left(\frac{1}{3}+i\right)+\left(-2-\frac{1}{4}i\right)+\left(-\frac{5}{4}-\frac{2}{5}i\right)$

29º) $\left(\frac{3}{2}+2\,i\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-2+\frac{3}{5}i\right)+\left(\frac{1}{2}-i\right)$

Efectuar las siguientes restas:

1º) $(3+4\,i)-(1+3\,i)$ 2º) $\left(\frac{1}{2};-3\right)-\left(4;-\frac{1}{3}\right)$

3º) $\left(-\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)$ 4º) $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{2}i\right)-(9-3i)$

5º) $\left(-\frac{1}{2};2\right)-\left(\frac{1}{2};-2\right)$ 6º) $\left(5-\frac{3}{5}i\right)-\left(5+\frac{3}{5}i\right)$

7º) $\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(1+\frac{2}{3}i\right)$ 8º) $\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}i\right)$

9º) $(3i)-(8i)$ 10º) $\left(\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{3}{2}i\right)$

11º) $(2i)-\left(-\frac{1}{3}i\right)$ 12º) $\left(\frac{4}{3}i\right)-\left(-\frac{2}{5}i\right)$

13º) $\left(-6-\frac{1}{2}i\right)-\left(0{,}5-\frac{1}{3}i\right)$ 14º) $\left(\frac{-1+2i}{3}\right)-\left(\frac{5}{6}-i\right)$

15º) $(0{,}8+i)-(-1-i)$ 16º) $(1{,}4-0{,}2i)-\left(6+\frac{3}{2}i\right)$

17º) $(-0{,}15+0{,}9i)-(-1-1{,}7i)$ 18º) $\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(-2\sqrt{3}+4i\right)$

19º) $\left(10-\sqrt{2i}\right)-\left(-0{,}7-0{,}5\sqrt{2i}\right)$

Efectuar las siguientes sumas algebraicas:

1º) $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}i\right)+\left(-\frac{1}{3}+4i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}i\right)$

2º) $\left(3+\frac{4}{5}i\right)-\left(\frac{2}{3}-i\right)+\left(-\frac{1}{2}+3i\right)+(2-i)$

3º) $\left(\frac{1}{4}i\right)-(-5i)-(3i)$ 4º) $\left(\frac{4}{5}i\right)-\left(\frac{1}{2};4\right)-(3;2)$

5º) $\left(-\frac{1}{5}-\frac{3}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}i\right)$

6º) $\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{2};\frac{5}{6}\right)-(3i)+\left(-\frac{1}{2}i\right)$

7º) $(5i) + \left(-3 + \frac{4}{5}i\right) - \left(\frac{3}{5}i\right) - \left(-3 - \frac{4}{5}i\right)$

8º) $\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} - 2i\right) - (9i) + \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)$

9º) $\left(-\frac{1}{4}i\right) + (-3i) + \left(-\frac{3}{5}i\right) - \left(-\frac{2}{3}i\right)$

10º) $(3 + 4i) + (9i) - (-2 - 5i)$

11º) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right) - \left(-\frac{2}{7}i\right) - \left(\frac{1}{2} + 3i\right)$

12º) $\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{5}i\right) - \left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{2}i\right) + (9i)$

13º) $\left(4 - \frac{3}{5}i\right) - \left(\frac{1}{4}i\right) - (-2i) + \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)$

14º) $\left(-\frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{3} + 3i\right) + \left(-\frac{1}{3} - 3i\right) + (-5i)$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

1º) $(3 + 2i) \cdot (4 + 3i)$

2º) $\left(\frac{1}{2} + 3i\right) \cdot \left(\frac{2}{5} + 2i\right)$

3º) $\left(4 + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(5 + \frac{3}{2}i\right)$

4º) $\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(2 - \frac{4}{5}i\right)$

5º) $\left(-\frac{3}{5} + i\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}i\right)$

6º) $\left(-\frac{1}{4} - 3i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}i\right)$

7º) $\left(2 - \frac{3}{2}i\right) \cdot \left(2 + \frac{3}{2}i\right)$

8º) $\left(\frac{9}{5} - \frac{2}{3}i\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{4}i\right)$

9º) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} - \frac{9}{5}i\right)$

10º) $\left(-\frac{5}{6} + 3i\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2}i\right)$

11º) $\left(\frac{1}{2} + 3i\right) \cdot (4 + 5i) \cdot \left(2 - \frac{1}{4}i\right)$

12º) $\left(\frac{5}{3} + 9i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3i\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2}i\right)$

13º) $\left(3;-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2};2\right)\cdot\left(\frac{2}{3};-1\right)$

14º) $\left(\frac{1}{2};-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2};3\right)\cdot(4;2)$

15º) $(3i)\cdot(2i)\cdot(-i)$

16º) $\left(-\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{5}i\right)\cdot(-10i)$

17º) $(5i)\cdot\left(-\frac{3}{4}i\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}i\right)\cdot(16i)$

18º) $\left(-\frac{1}{3}i\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}i\right)\cdot(3i)\cdot(5i)\cdot(-0{,}8i)$

19º) $\left(-\frac{9}{5}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}i\right)\cdot(10i)\cdot(2i)\cdot(-i)$

20º) $\left(-\frac{1}{3}i\right)\cdot(5i)\cdot(15i)\cdot\left(\frac{1}{75}i\right)$

21º) $\left(\frac{1}{2}-2i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+2i\right)$

22º) $\left(\sqrt{5}+2i\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2i\right)$

23º) $(0{,}1-i)\cdot(0{,}1+i)$

24º) $\left(-3+\sqrt{2i}\right)\cdot\left(-3-\sqrt{2i}\right)$

25º) $\left(\frac{7-8i}{3}\right)\cdot\left(\frac{7+8i}{3}\right)$

26º) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}i\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5i}\right)$

27º) $\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i\right)$

28º) $\left(-1+\frac{2}{5}i\right)\cdot\left(-1-\frac{2}{5}i\right)$

29º) $(0{,}2+1{,}1i)\cdot(0{,}2-1{,}1i)$

30º) $\left(\frac{1}{2}-i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\right)$

31º) $(1{,}2+0{,}3i)\cdot(1{,}2-0{,}3i)$

32º) $\left(2\sqrt{3};4\right)\cdot\left(2\sqrt{3};-4\right)$

33º) $\left(\sqrt{10};\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{10};\sqrt{5}\right)$

Efectuar las siguientes divisiones:

1º) $(3+4i):(5-2i)$

2º) $\left(\frac{1}{2}+3i\right):\left(\frac{1}{3}+4i\right)$

3º) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i\right):\left(-\frac{1}{2}+2i\right)$

4º) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}i\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)$

5º) $\left(9-\frac{1}{2}i\right):\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}i\right)$

6º) $\left(-3-\frac{1}{3}i\right):\left(-\frac{2}{5}-2i\right)$

7º) $\left(\frac{1}{3}+4i\right):\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i\right)$

8º) $\left(-9-\frac{3}{5}i\right):\left(-9+\frac{3}{5}i\right)$

9º) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}i\right):\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i\right)$

10º) $\dfrac{-2+i}{-2-i}$

11º) $\dfrac{4+2i}{4-2i}$

12º) $\dfrac{-\frac{2}{3}+5i}{-\frac{2}{3}-5i}$

13º) $\dfrac{0{,}5+2i}{1-i}$

14º) $\dfrac{6+i}{-\frac{1}{3}i}$

15º) $\dfrac{-3+0{,}4i}{2-0{,}2i}$

16º) $\dfrac{-\frac{1}{2}+0{,}4i}{\frac{5}{4}-i}$

17º) $\dfrac{0{,}2-\frac{3}{4}i}{-0{,}5+2i}$

18º) $\dfrac{1-1{,}2i}{-3i}$

19º) $\dfrac{4-6i}{0{,}5i}$

20º) $\dfrac{-7i}{-4+3i}$

21º) $\dfrac{\frac{2}{3}i}{1-6i}$

Calcular las siguientes potencias:

1º) $(3+4i)^2$

2º) $\left(\frac{1}{2}-3i\right)^2$

3º) $(9-i)^2$

4º) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)^2$

5º) $\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i\right)^2$

6º) $\left(2+\frac{1}{3}i\right)^2$

7º) $\left(-\frac{9}{5}+2i\right)^2$

8º) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)^2$

9º) $(1-i)^2$

10º) $(-2+i)^2$ 11º) $(2+3i)^2$ 12º) $\left(\frac{1}{3}-3i\right)^2$

13º) $\left(\frac{1}{3};-2\right)^2$ 14º) $\left(-\frac{1}{2};4\right)^3$ 15º) $\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{2}\right)^3$

16º) $\left(5;-\frac{1}{2}\right)^3$ 17º) $\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^3$ 18º) $\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}i\right)^3$

19º) $\left(5+\frac{2}{5}i\right)^3$ 20º) $\left(-\frac{1}{3}-6i\right)^3$ 21º) $\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}i\right)^3$

22º) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ 23º) $\left(-\frac{1}{2}i\right)^2$ 24º) $\left(\sqrt{7i}\right)^2$

25º) $(-2i)^4$ 26º) $\left(\sqrt{3i}\right)^6$

Calcular:

1º) $\sqrt{-16}$ 2º) $\sqrt{-4}$ 3º) $\sqrt{-100}$

4º) $\sqrt{-9}$ 5º) $\sqrt{-169}$ 6º) $\sqrt{-\frac{1}{25}}$

7º) $\sqrt{-\frac{81}{144}}$ 8º) $\sqrt{-\frac{25}{36}}$ 9º) $\sqrt{-\frac{4}{9}}$

10º) $\sqrt{-0{,}01}$ 11º) $\sqrt{-0{,}81}$ 12º) $\sqrt{-2{,}25}$

13º) $\sqrt{-1{,}44}$ 14º) $\sqrt{-0{,}04}$ 15º) $\sqrt{-9a^2}$

16º) $\sqrt{-x^2}$ 17º) $\sqrt{-\frac{4}{n^4}}$ 18º) $\sqrt{-a^2b^4}$

19º) $\sqrt{-\frac{a^2}{x^2}}$ 20º) $\sqrt{-\frac{n^2}{16}}$ 21º) $\sqrt{-49}$

22º) $\sqrt{-81}$ 23º) $\sqrt{-625}$ 24º) $\sqrt{-10\,000}$

25º) $\sqrt{-\frac{1}{121}}$ 26º) $\sqrt{-0{,}000\,1}$ 27º) $\sqrt{-\frac{1}{625}}$

28º) $\sqrt{-\frac{9}{1\,024}}$ 29º) $\sqrt{-a^4}$ 30º) $\sqrt{-a^4x^8}$

31º) $\sqrt{-\frac{1}{x^8}}$ 32º) $\sqrt{-m^9}$

CAPÍTULO VII.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1. Para que una ecuación con una incógnita sea de segundo grado, es necesario que esa incógnita, figure a la segunda potencia en alguno de sus términos y que no haya otra potencia mayor de dicha incógnita.

Así, por ejemplo, son ecuaciones de segundo grado con una incógnita

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 3x$$

$$5x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$7x - x^2 = 0$$

$$3x(x - 5) = 6x$$

Como en estas ecuaciones, por lo menos en un término, debe figurar el segundo grado de la incógnita, y es el más alto grado de la misma en esa ecuación, cabe también que haya un término en que figure el primer grado de la incógnita, y un término de grado cero que se llama término independiente.

Así, por ejemplo, en la ecuación:

$$5x^2 + 4x + 9 = 0$$

$5x^2$ es el término de segundo grado; $4x$ es el término de primer grado y 9 es el término independiente.

Cuando efectuadas las operaciones indicadas en la ecuación y reducidos los términos semejantes figuran el término de segundo

grado, el de primer grado y el independiente la ecuación se dice *completa*. Cuando falta el término independiente o el de primer grado, la ecuación se dice *incompleta*.

Es evidente que el término en x^2 no puede faltar, pues, entonces, la ecuación no sería de segundo grado.

En la ecuación de segundo grado completa o incompleta se acostumbra a escribir ordenadamente el término de segundo grado y sumados a él, si los hay, el de primer grado y el término independiente igualando a cero dicha suma. Así se ha procedido en el último ejemplo.

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que la satisfacen. Esos valores se llaman *raíces* de la ecuación.

Así, los números 2 y 3 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

pues reemplazando x por el valor 2 o por el valor 3, se verifica la igualdad que expresa la ecuación. En efecto:

Reemplazando x por 2, resulta:

$$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$$

$$\therefore \quad 4 - 10 + 6 = 0$$

Reemplazando x por 3, resulta:

$$3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$$

$$\therefore \quad 9 - 15 + 6 = 0$$

A continuación consideraremos la resolución de los distintos tipos de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.

2. PRIMER CASO. FALTA EL TÉRMINO DE PRIMER GRADO.

Sea, por ejemplo, resolver la ecuación

$$3x^2 - 48 = 0$$

Para calcular el valor de x, tratemos de despejar x, dejándola sola en el primer miembro. Para ello trasponemos el término -48, que pasa al segundo miembro con signo $+$, y se tiene:

$$3x^2 = 48$$

Llevando el factor 3 al segundo miembro que pasa como divisor:

$$x^2 = \frac{48}{3}$$

Simplificando:

$$x^2 = 16$$

Teniendo el valor de x^2, para calcular x, debemos extraer la raíz cuadrada en ambos miembros, es decir:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

Simplificando índice y exponente en el primer miembro, se tiene:

$$x = \pm\sqrt{16}$$

pero:

$$\pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Luego:

$$x = \pm 4$$

Es decir, que esta ecuación tiene dos raíces que son: $+4$ y -4. Se acostumbra a designar estas raíces por x_1 y x_2, respectivamente.

En nuestro caso:

$$x_1 = +4$$

y

$$x_2 = -4$$

En general, indicando las ecuaciones incompletas de este tipo con la notación:

$$a x^2 + c = 0$$

y despejando la incógnita según hemos procedido en el ejemplo anterior, se tiene:

$$a x^2 = - c$$

de donde

$$x^2 = - \frac{c}{a}$$

luego: $x = \pm \sqrt{- \frac{c}{a}}$ $\therefore$ $\begin{cases} x_1 = + \sqrt{- \frac{c}{a}} \\ x_2 = - \sqrt{- \frac{c}{a}} \end{cases}$

El resultado obtenido nos conduce a enunciar la siguiente

REGLA. *Las raíces de una ecuación incompleta de segundo grado, donde falta el término en* x*, están dadas por los números opuestos que se obtienen extrayendo la raíz cuadrada del cociente del término independiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente del término en* x^2.

En general, para resolver este tipo de ecuaciones es más cómodo despejar la incógnita, como hemos procedido en los ejemplos anteriores, que recordar la regla.

3. SEGUNDO CASO. FALTA EL TÉRMINO INDEPENDIENTE.

Sea, por ejemplo, resolver la ecuación:

$$5 x^2 + 4 x = 0$$

Observamos que en el primer miembro puede sacarse el factor común x; es decir:

$$x (5 x + 4) = 0$$

Como el primer miembro es el producto de dos factores: el factor x y el factor $(5x + 4)$, para que el producto de los mismos sea 0, como impone la ecuación, debe ser necesariamente cero por lo menos uno de los factores. Es decir, debe verificarse una de las dos condiciones siguientes:

$$x = 0 \qquad [1]$$

o bien:

$$5x + 4 = 0 \qquad [2]$$

La relación [1] nos dice que $x = 0$ satisface la ecuación; luego, una de las raíces es 0, es decir:

$$x_1 = 0$$

De [2], despejando x, se tiene:

$$5x = -4$$

$$\therefore \quad x = -\frac{4}{5}$$

Luego, la otra raíz de la ecuación es:

$$x_2 = -\frac{4}{5}$$

En general, indicando las ecuaciones de este tipo con la notación

$$a x^2 + b x = 0$$

y procediendo como en el ejemplo anterior, se tiene:

$$x(a x + b) = 0$$

de donde debe verificarse una de las relaciones siguientes:

$$x = 0 \quad \therefore \quad x_1 = 0$$

o bien:

$$ax + b = 0 \quad \therefore \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Los resultados obtenidos nos conducen a enunciar la siguiente

REGLA: *Las raíces de una ecuación incompleta de segundo grado, donde falta el término independiente, son respectivamente 0 y el cociente que resulta de dividir el coeficiente del término de primer grado, cambiado de signo, por el coeficiente del término de segundo grado.*

Análogamente a lo que se dijo en el caso anterior, para resolver este tipo de ecuaciones es más cómodo hacer las trasposiciones del ejemplo anterior, que recordar la regla.

ECUACIONES COMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.

4. Dentro de las ecuaciones completas se consideran dos casos según que el coeficiente del término en x^2 sea igual o diferente de uno.

En el primer caso la ecuación se llama *completa reducida;* en el segundo *completa general.*

Estudiaremos primero las

ECUACIONES COMPLETAS REDUCIDAS.

Se representan comúnmente por la notación:

$$x^2 + px + q = 0$$

donde p es el coeficiente del término de primer grado y q el término independiente.

Deduciremos la expresión que nos permite calcular las raíces de esta ecuación. Para ello se procede así:

Se pasa el término q al segundo miembro, y se tiene:

$$x^2 + px = -q$$

Se suma $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ a ambos miembros, de donde:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad [1]$$

El trinomio del primer miembro es igual al desarrollo de

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

En efecto:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \cancel{2}x\frac{p}{\cancel{2}} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 .$$

Luego, reemplazando en el primer miembro de [1]:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

y extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros:

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Simplificando en el primer miembro la raíz cuadrada con el exponente 2 y teniendo en cuenta en el segundo el doble signo de la raíz cuadrada, se obtiene:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y pasando $\frac{p}{2}$ al segundo miembro, resulta:

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad - \frac{p}{2}$$

o bien escribiendo primero el término negativo $-\frac{p}{2}$, se tiene:

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Es evidente que adoptando el signo $+$ de la raíz cuadrada se obtiene una de las raíces, la x_1 por ejemplo, y adoptando el signo $-$ se obtiene la otra raíz, x_2, es decir:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{cases}$$

Resumiendo los resultados obtenidos, podemos decir que las raíces de la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

están dadas por la expresión:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Teniendo en cuenta que p es el coeficiente del término de primer grado y q el término independiente, podemos enunciar la siguiente

Regla: *En una ecuación de segundo grado completa reducida, las raíces están dadas por el semicoeficiente del término de primer grado cambiado de signo, más o menos la raíz cuadrada de ese mismo semicoeficiente al cuadrado, más el término independiente cambiado de signo.*

Observación 1ª Cuando en la ecuación dada, el término de segundo grado figura con signo menos, se lo transforma en positivo multiplicando ambos miembros por -1, es decir, cambiando el signo de todos los términos.

Observación 2ª Cuando en la ecuación figuran operaciones indicadas, para aplicar la regla, es preciso efectuar primero dichas operaciones y luego las trasposiciones de términos para llevar la ecuación a la forma general.

APLICACIONES.

Ejemplo 1º:

Resolver la ecuación:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Aplicamos la fórmula:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y, teniendo en cuenta que en este caso: $p = 3$, y $q = 2$, es:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. Resuelta la ecuación, una comprobación consiste en reemplazar la incógnita por cada una de las raíces obtenidas, y ver si la ecuación se satisface.

EJEMPLO 2º:

Resolver la ecuación

$$x^2 - 6x + 23 = 0$$

En este caso, $p = -6$; en consecuencia:

$$-\frac{p}{2} = -\left(-\frac{6}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3 \quad ; \quad y \quad q = 25$$

Luego:

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 25}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 25}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{-16}$$

$$x = 3 \pm 4i \begin{cases} x_1 = 3 + 4i \\ x_2 = 3 - 4i \end{cases}$$

Es decir que en esta ecuación las raíces son números complejos conjugados.

EJEMPLO 3º:

Resolver la ecuación:

$$x^2 + x - \frac{15}{4} = 0$$

En este ejemplo:

$$p = 1 \quad \therefore \quad -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{15}{4} \quad \therefore \quad -q = \frac{15}{4}$$

En consecuencia:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm 2 \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

EJEMPLO 4º:

Resolver la ecuación:

$$\frac{x^2 + 3x}{2} = 4x - 1$$

En este caso, debemos transformar la ecuación, dándole la forma conocida. Para ello pasamos primero el divisor 2 al segundo miembro, como factor y se tiene:

$$x^2 + 3x = (4x - 1)2$$

o sea:

$$x^2 + 3x = 8x - 2$$

Trasponiendo los términos del segundo miembro al primero:

$$x^2 + 3x - 8x + 2 = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

La ecuación aparece así escrita en la forma general.

Entonces podemos aplicar la fórmula conocida:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Luego se tiene:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25 - 8}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{17}}{2} = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{17}}{2} = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

EJEMPLO 5º:

Resolver la ecuación:

$$(x - 3)^2 + 5x(x^2 - 1) = x^2(5x + 2) - 3$$

En este ejercicio es preciso efectuar primero las operaciones indicadas, desarrollando el cuadrado del binomio y aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y a la diferencia.

$$x^2 - 6x + 9 + 5x^3 - 5x = 5x^3 + 2x^2 - 3$$

Reduciendo los términos semejantes $5x^3$ que aparecen en ambos miembros y reuniendo todos los restantes en el primer miembro, queda:

$$x^2 - 6x + 9 - 5x - 2x^2 + 3 = 0$$

Reduciendo los términos semejantes:

$$-x^2 - 11x + 12 = 0$$

Como el término de segundo grado tiene signo negativo multiplicamos ambos miembros de la ecuación por (-1) y resulta:

$$x^2 + 11x - 12 = 0$$

Aplicando la fórmula para obtener las raíces se tiene:

$$x = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} + 12}$$

$$x = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121+48}{4}}$$

$$x = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}}$$

$$x = -\frac{11}{2} \pm \frac{13}{4} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{11}{2} + \frac{13}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\frac{11}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{24}{2} = -12 \end{cases}$$

ECUACIÓN COMPLETA GENERAL.

Según hemos dicho, en este caso el coeficiente de x^2 es distinto de uno y la ecuación se representa comúnmente por la notación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a es el coeficiente del término de 2º grado; b el coeficiente del término de primer grado y c el término independiente.

Vamos a determinar la expresión que nos permite encontrar directamente las raíces de esta ecuación:

Como a debe ser necesariamente diferente de cero para que la ecuación sea de segundo grado, es lícito dividir por a ambos miembros de la ecuación y se tiene:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

o sea:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Simplificando a en el primer término, es:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Esta ecuación podemos considerarla como una ecuación completa reducida, en que $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$.

Recordando que las raíces de una ecuación de ese tipo están dadas por la expresión:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

reemplazando p por su igual $\frac{b}{a}$, en cuyo caso $-\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a}$, y q por su igual $\frac{c}{a}$, se tiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Elevando al cuadrado la fracción del radicando:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Efectuando la resta que figura bajo el signo radical:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o sea:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

extrayendo la raíz del denominador, se tiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y teniendo en cuenta que las dos fracciones tienen el mismo denominador, finalmente podemos escribir:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

donde las dos raíces se obtienen adoptando, respectivamente, el signo + o el signo — que afecta el radical, es decir:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resumiendo los resultados obtenidos, se tiene que las raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

están dadas por la expresión

$$x - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Teniendo en cuenta que a es el coeficiente del término de segunde grado, b el coeficiente de primer grado y c el término independiente, se puede enunciar la siguiente

Regla: *Las raíces de una ecuación completa general están dadas por una fracción cuyo numerador es el coeficiente del término de primer grado cambiado de signo, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de ese mismo coeficiente menos el cuádruplo del producto del coeficiente del término de segundo grado por el término independiente y cuyo denominador es el duplo del coeficiente del término de segundo grado.*

Observación. En verdad, bastaría recordar esta expresión de las raíces para resolver una ecuación de segundo grado, de cualquier tipo. En efecto la ecuación completa reducida es el caso particular de la ecuación general cuando a es igual a 1, y las ecuaciones incompletas corresponden a los casos en que b o c son iguales a cero.

APLICACIONES.

Ejemplo 1º:

Resolver la ecuación:

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

Teniendo en cuenta que, en este ejemplo, $b = 7$, $c = 2$ y, $a = 3$, aplicando la expresión que nos da el valor de las raíces, se tiene:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$$

efectuando operaciones:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{6} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+5}{6} = \dfrac{-12}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-7-5}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

EJEMPLO 2º:

Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 6x - \frac{7}{2} = 0$$

En este ejemplo:

$$b = 6; \quad a = 2; \quad c = -\frac{7}{2}$$

En este caso, como c es negativo $-4ac$ es positivo, o sea:

$$-4ac = -4 \times 2\left(-\frac{7}{2}\right) = 4 \times 2 \times \frac{7}{2}$$

y, reemplazando en la fórmula, se tiene:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 2 \times \frac{7}{2}}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{4}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{-6 \pm 8}{4} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6 + 8}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-6 - 8}{4} = -\dfrac{14}{4} = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

EJEMPLO 3º:

Resolver la ecuación:

$$\frac{x + 1}{x^2 - 9} + \frac{x}{x + 3} = -\frac{1}{2}$$

En este ejemplo, transformamos la ecuación, para darle la forma conocida. Para ello, efectuamos la suma indicada en el primer miembro, reduciendo al mínimo común denominador, que es $x^2 - 9$, y se tiene:

$$\frac{x + 1 + x(x - 3)}{x^2 - 9} = -\frac{1}{2}$$

efectuando las operaciones indicadas:

$$\frac{x + 1 + x^2 - 3x}{x^2 - 9} = -\frac{1}{2}$$

pasando los denominadores:

$$2(x + 1x^2 - 3x) = -1(x^2 - 9)$$

$$\therefore \quad 2x + 2 + 2x^2 - 6x = -x^2 + 9$$

trasponiendo los términos del segundo miembro al primero, se tiene:

$$2x + 2 + 2x^2 - 6x + x^2 - 9 = 0$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando, resulta:

$$3x^2 - 4x - 7 = 0$$

Hemos llegado así a la forma general de la ecuación. Aplicando la fórmula que nos da las raíces, se tiene:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 10}{6} \quad \therefore \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + 10}{6} = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3} \\ x_2 = \dfrac{4 - 10}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

EJEMPLO 4º:

Resolver la ecuación:

$$\frac{-\frac{1}{2}x}{x - 2} - 1 = \frac{3x - 5}{x}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$\frac{-\frac{1}{2}x - (x - 2)}{x - 2} = \frac{3x - 5}{x}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}x - x + 2}{x - 2} = \frac{3x - 5}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{2}x - x + 2\right)x = (3x - 5)(x - 2)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x^2 + 2x = 3x^2 + 5x + 6x + 10$$

Pasando todos los términos al primer miembro:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x^2 + 2x - 3x^2 + 5x + 6x - 10 = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-\frac{9}{2}x^2 + 13x - 10 = 0$$

o sea, multiplicando por (-1), para que el término de segundo grado resulte positivo

$$\frac{9}{2}x^2 - 13x + 10 = 0$$

Luego, aplicando la fórmula para extraer las raíces:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times \frac{9}{2} \times 10}}{2 \times \frac{9}{2}}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 180}}{9}$$

$$x = \frac{13 \pm i\sqrt{11}}{9} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{13 + i\sqrt{11}}{9} \\ x_2 = \dfrac{13 - i\sqrt{11}}{9} \end{cases}$$

EJEMPLO 5º:

Resolver la ecuación:

$$2mx^2 - nx + 5 = 0$$

Aplicando la fórmula conocida, teniendo en cuenta que

$$b = -n; \quad a = 2m; \quad c = 5$$

Luego:

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4 \times 2m \times 5}}{2 \times 2m}$$

$$x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 40\,m}}{4\,m} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{n + \sqrt{n^2 - 40\,m}}{4\,m} \\ x_2 = \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 40\,m}}{4\,m} \end{cases}$$

5. Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación completa reducida:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Obtengamos sus raíces:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$$

de donde:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

o sea:

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Observamos que:

1º La suma de las raíces: $3 + 2 = 5$, cambiada de signo, es igual al coeficiente del término de primer grado, que es -5.

2º El producto de las raíces: $3 \times 2 = 6$, es igual al término independiente de la ecuación.

Estas observaciones son generales y se demuestran en los siguientes teoremas:

1ER. TEOREMA. *La suma de las raíces de una ecuación completa reducida de segundo grado es igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo.*

H) $x^2 + px + q = 0$, ecuación completa reducida de raíces x_1 y x_2

T) $x_1 + x_2 = -p$

Demostración. Sabemos que:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sum. m. a m.:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Reduciendo los radicales, que son términos opuestos, se tiene:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2}$$

o sea:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2p}{2}$$

$\therefore$ $\boxed{x_1 + x_2 = -p}$ que es la tesis.

2º TEOREMA. *El producto de las raíces de una ecuación completa reducida de segundo grado es igual al término independiente.*

H) $x^2 + px + q = 0$, ecuación completa reducida de raíces x_1 y x_2

T) $x_1 x_2 = q$

Demostración. **Sabemos que:**

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

y

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Mult. m. a m.:

$$x_1\, x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

En el segundo miembro figura el producto de la suma por la diferencia de los mismos números:

$$\left(-\frac{p}{2}\right) \quad \text{y} \quad \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

que, como sabemos es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Luego:

$$x_1\, x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]^2$$

Simplificando índice y exponente:

$$x_1\, x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

o sea, quitando el corchete:

$$x_1\, x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

y como $\left(-\frac{p}{2}\right)^2$ es igual a $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, se pueden reducir los dos primeros términos del segundo miembro y resulta:

$$\boxed{x_1\, x_2 = q}$$ **que es la tesis.**

6. Observación. Cuando la ecuación es completa general, puede considerarse de la forma reducida, haciendo, según se ha visto:

$$\frac{b}{a} = p \quad y \quad \frac{c}{a} = q$$

Como:

$$x_1 + x_2 = -p, \text{ en este caso particular: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

y como:

$$x_1 x_2 = q, \quad " \quad " \quad " \quad " \quad : \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

7. Reconstrucción de la ecuación de segundo grado conocidas las raíces. — Teniendo en cuenta las propiedades de las raíces, que acabamos de estudiar en los teoremas anteriores, dadas las raíces de una ecuación de segundo grado, se puede reconstruir esa ecuación.

Ejemplo 1º:

Siendo las raíces de una ecuación -5 y 3, reconstruir la ecuación. Según hemos visto:

$$x_1 + x_2 = -p$$

En este ejemplo:

$$-p = -5 + 3 = -2$$

$$\therefore \quad p = 2$$

y como:

$$x_1 x_2 = q$$

En este ejemplo:

$$q = (-5)\,3 = -15$$

$$\therefore \quad q = -15$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

p y q por los valores hallados, se tiene la ecuación buscada, que es:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

EJEMPLO 2º:

Siendo las raíces de una ecuación

$$-\frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{2}{3}$$

reconstruir la ecuación.

En este ejemplo:

$$-p = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-3-4}{6} = -\frac{7}{6}$$

$$\therefore \quad p = \frac{7}{6}$$

y

$$q = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Luego la ecuación buscada es:

$$x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

OBSERVACIÓN. Para verificar el resultado en los ejemplos anteriores, se pueden resolver las ecuaciones obtenidas y las raíces deben coincidir con los números dados.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Resolver las siguientes ecuaciones del tipo: $ax^2 + c = 0$.

1º) $3x^2 - 12 = 0$ 2º) $81x^2 - 9 = 0$ 3º) $x^2 - 2 = 0$

4º) $4x^2 - 9 = 0$ 5º) $x^2 - 0{,}16 = 0$ 6º) $25x^2 - 81 = 0$

7º) $x^2 - 25 = 0$ 8º) $3x^2 - 27 = 0$ 9º) $-x^2 + 4 = 0$

10º) $-10x^2 + 12{,}1 = 0$ 11º) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{9} = 0$ 12º) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{27} = 0$

13º) $\frac{2}{3}x^2 - 3 = 0$

14º) $\frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{5} = 0$

15º) $\frac{1}{25}x^2 - 4 = 0$

16º) $\frac{12}{5}x^2 - \frac{20}{3} = 0$

17º) $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{8}{25} = 0$

18º) $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{27} = 0$

19º) $x^2 - 5 = 0$

20º) $3x^2 - 8 = 0$

21º) $\frac{1}{3}x^2 - 3 = -x^2 - 2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

22º) $-0{,}5\,x^2 + 2x = 2x - 8$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

23º) $x(x + 3) - (3x + 4) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

24º) $(x + 5)(x - 5) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

25º) $(2x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

26º) $(2x + 3)(2x - 3) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$

27º) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(2 + \frac{1}{2}x\right) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

28º) $\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{x - \frac{1}{2}}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$

29º) $2x + 3 = \frac{7x}{x + 2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = i\sqrt{3} \\ x_2 = -i\sqrt{3} \end{cases}$

30º) $\frac{\frac{1}{3}x - 2}{x - 1} = \frac{x}{x + 3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$

31º) $\frac{5x + 1}{3x + 2} - \frac{7}{x + 4} = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$

32º) $\frac{2(x - 3)}{x} = \frac{5x - 2}{x + 2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$

33º) $\frac{x + 4}{x + 1} - \frac{3x + 4}{x + 3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

34º) $\frac{3x}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+2+7x}{x^2-4}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$

35º) $\frac{x-2}{x+1} = \frac{x}{x+1} - \frac{4x}{2x-3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = i\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = -i\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

36º) $\frac{5x-4}{x-2} = \frac{24}{x^2-4} - \frac{3x}{x+2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

37º) $\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{12}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{12}} \end{cases}$

38º) $\frac{9}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{8} = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

39º) $\left(3x - \sqrt{2a}\right)\left(3x + \sqrt{2a}\right) = 14a$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{4\sqrt{a}}{3} \\ x_2 = -\frac{4\sqrt{a}}{3} \end{cases}$

40º) $\left(\frac{x}{2} - a\right)^2 = 2a^2 - xa$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2a \\ x_2 = -2a \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones del tipo: $ax^2 + bx = 0$.

1º) $3x^2 - 5x = 0$

2º) $2x^2 - x = 0$

3º) $x^2 - x = 0$

4º) $x^2 + 4x = 0$

5º) $x^2 + 2x = 0$

6º) $9x^2 - 4{,}5x = 0$

7º) $-3x^2 + 2x = 0$

8º) $-1{,}5x = 0{,}1x^2$

9º) $\frac{[illegible]}{2}x^2 + 0{,}75x = 0$

10º) $-\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x = 0$

11º) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x = 0$

12º) $x - x^2 = 3x$

13º) $x^2 - ax = 0$

14º) $\sqrt{2}x^2 - 2x = 0$

15º) $x(x+3) = 5x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

16º) $x\left(x - \frac{1}{2}\right) = -3{,}5x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

17º) $(x+1)(x-3) = -3$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

18º) $(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

19º) $\left(2x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) = 0{,}08$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

20º) $\left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(4x + \frac{1}{2}\right) = -0{,}25 - 8x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

21º) $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{x-1} + 2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

22º) $\frac{5x}{2x+4} - \frac{x-4}{x^2+4x+4} = \frac{2}{x+2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$

23º) $\frac{\frac{1}{6}x}{2x+5} = \frac{x}{3+2x}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2{,}7 \end{cases}$

24º) $\frac{4x+2}{x} = \frac{2x+3}{x+1} + \frac{2}{x}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

25º) $\frac{x(x+3)}{x^2-1} - \frac{5x}{x+1} = \frac{x}{x-1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{7}{5} \end{cases}$

26º) $\frac{2x+3}{x+5} = \frac{x-3}{x-5}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

27°) $$\frac{\frac{1}{2}x}{3x+1} = -\frac{6}{2x+3} + 2$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{5}{22} \end{cases}$

28°) $$\frac{x}{3x+5} - \frac{1}{x+1} = -1$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

29°) $$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{x+1}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

30°) $$4 - \frac{x+3}{x} = \frac{2x+3}{x^2} - \frac{3}{x^2}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

31°) $$-3x + 1 = -\frac{1}{3x-1}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

32°) $$\frac{3x^2}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{x}{6} + \frac{5x^2}{4}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{10}{3} \end{cases}$

33°) $$\frac{x^2 - 3x}{4} = \frac{2x^2}{3} - \frac{5x}{4}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{6}{5} \end{cases}$

34º) $\sqrt{\frac{1}{3}}\,x^2 - \sqrt{12}\,x = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

35º) $x^2\sqrt{a^5} = x\sqrt{a}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$

36º) $x(m + nx) = 3\,nx^2 - 5\,mx$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{3\,m}{n} \end{cases}$

37º) $2\,a(a + x) = a^2(2 - 3\,x^2)$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3a} \end{cases}$

38º) $\dfrac{x^2 + 1}{3} - \dfrac{2\,x + 5}{4} = -\dfrac{11}{12}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

39º) $\dfrac{2\,m^2\,x - 1}{2} + \dfrac{3\,mnx^2 + 2}{3} = \dfrac{1}{6}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{m}{n} \end{cases}$

40º) $\dfrac{x}{x + 1} - 2 = \dfrac{2}{x - 1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones del tipo: $x^2 + px + q = 0$.

1º) $x^2 - 4x - 32 = 0$

2º) $x^2 - 5x - 24 = 0$

3º) $x^2 - 2x + 1 = 0$

4º) $x^2 - 5x + 0{,}49 = 0$

5º) $x^2 + \frac{3}{5}x - 106 = 0$

6º) $x^2 + \frac{1}{2}x - 14 = 0$

7º) $x^2 + 3x - 10 = 0$

8º) $x^2 - 6{,}5x + 10{,}5 = 0$

9º) $x^2 - 5x - 0{,}96 = 0$

10º) $x^2 - 3x = 1{,}75$

11º) $x^2 - 10\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$

12º) $\frac{1}{2} - 1{,}5x = -x^2$

13º) $x^2 - 3{,}5x = 2{,}5x - 5$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

14º) $3x^2 - 2x - 3 = 4x^2 - 7 + 2x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2(-1 + \sqrt{2}) \\ x_2 = 2(-1 - \sqrt{2}) \end{cases}$

15º) $2x^2 - 4x - 5 = 2x + x^2 - 10$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

16º) $x(x + 3) = 2x^2 + 2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

17º) $x(5 + 2x) = x(x + 1) - 3$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

18º) $2x(7x + 5) + 10 = 3x(5x + 9) - 8$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -18 \end{cases}$

19º) $(x + 5)\,2x - 3x + 4 = 3(x^2 - 3) - 5$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

20º) $(x-1)^2 = (x+3)(x-1) - 4x^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

21º) $2x\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + 6{,}25 = (3-x)^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0{,}5 \\ x_2 = -5{,}5 \end{cases}$

22º) $3(x+1)(x-2) = 4x(x-3) + 2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

23º) $\dfrac{(x+2)^2}{3x} = 0$

Respuesta: $\{ x_1 = x_2 = -2$

24º) $\dfrac{x^2}{2} = 2 + x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1+\sqrt{5} \\ x_2 = 1-\sqrt{5} \end{cases}$

25º) $5x - 12 = \dfrac{x^2}{2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

26º) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{4}{x+2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

27º) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{\dfrac{1}{3}x} = 14$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

28º) $-1{,}5 = \frac{(x+1)\,(x-3)}{x}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$

29º) $\frac{5}{x+3} = \frac{3}{2\,x} + \frac{2}{x-3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 7 + 2\sqrt{10} \\ x_2 = 7 - 2\sqrt{10} \end{cases}$

30º) $\frac{x+2}{x+1} = 2 + \frac{x-2}{x-1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

31º) $\frac{4\,x}{x+2} - \frac{10}{3} = \frac{2}{x-2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 14 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

32º) $\frac{5-3\,x}{3\,x} + \frac{x-2}{1-x} = -\frac{2\,x-1}{1+x}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 6 + \sqrt{31} \\ x_2 = 6 - \sqrt{31} \end{cases}$

33º) $\frac{x-1}{x} = \frac{x}{2\,x+1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

34º) $a(a-2\,x) = 2 - x^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = a + \sqrt{2} \\ x_2 = a - \sqrt{2} \end{cases}$

35º) $(x + n\,(x-n) = -(2\,x+m)m$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -m + n \\ x_2 = -m - n \end{cases}$

36º) $x^2 + 8x\sqrt{mn} + 7mn = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{mn} \\ x_2 = -7\sqrt{mn} \end{cases}$

37º) $x(x-1) = 1,75$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 0,50 + \sqrt{2} \\ x_2 = 0,50 - \sqrt{2} \end{cases}$

38º) $\dfrac{3a^2}{x} - x = 2a$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -3a \end{cases}$

39º) $x^2 = 15a - 2x\sqrt{a}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 3\sqrt{a} \\ x_2 = -5\sqrt{a} \end{cases}$

40º) $m(6m - x) = x^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2m \\ x_2 = -3m \end{cases}$

41º) $x^2 - 2ax = 1 - a^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = a + 1 \\ x_2 = a - 1 \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$.

1º) $2x^2 + 5x - 18 = 0$

2º) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

3º) $4x^2 + x - \dfrac{1}{2} = 0$

4º) $3x^2 - x + \dfrac{1}{16} = 0$

5º) $2x^2 + x - 15 = 0$

6º) $\dfrac{1}{2}x^2 - 3x = -\dfrac{5}{2}$

7º) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

8º) $3x^2 + \dfrac{1}{3} = -2x$

9º) $\dfrac{3}{2}x^2 - 1 = x$

10º) $3x^2 - 5x = -2$

11º) $8x^2 + \dfrac{17}{2} = 4x$

12º) $5x^2 - x = -3x + 2x^2 + 8$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} \\ x_2 = -2 \end{cases}$

13º) $x(3x + 1) - \dfrac{1}{4} = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

14º) $2x(x - 5) + 3x = 10\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

15º) $(x - 5)\,2x - 3x + 4x(x + 3) = 12$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

16º) $(2x + 4)^2 = (x + 3)^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$

17º) $x(2x + 5) - 3x^2 + 5(x^2 - 2) = -4$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} \\ x_2 = -2 \end{cases}$

18º) $5x + 3 = (2x - 5)\,3 + 15x^2 + 2(2x + 1) + 6$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$

19º) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)-\left(\frac{3}{2}x-2\right)(2x+1)=0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

20º) $2(6+5x)(x+1)=5\left(2x+\frac{1}{5}\right)+1$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{-5+4i}{5} \\ x_2 = \frac{-3-4i}{5} \end{cases}$

21º) $\frac{(2x+3)^2}{x}=-1$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$

22º) $3(x^2+4)=2x-\frac{1}{3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}+2i \\ x_2 = \frac{1}{3}-2i \end{cases}$

23º) $\frac{x+1}{3x}-1=\frac{1-x}{2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

24º) $\frac{(x+1)(3x+4)-2x^2}{4x}=-\frac{4}{3}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = -12 \end{cases}$

25º) $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{3x}{x+2} = 1$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{97}}{12} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{97}}{12} \end{cases}$

26º) $\frac{\left(3x+\frac{1}{3}\right)\ 3}{x+1} = \frac{2x}{3x+1}$

Respuesta: $\{\ x_1 = x_2 = -\frac{1}{5}$

27º) $\frac{2x-1}{x-2} = 1 - \frac{2x}{2x-1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

28º) $\frac{x^2+3-2x}{3} = \frac{x^3-2}{3x+1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{7+\sqrt{229}}{10} \\ x_2 = \frac{7-\sqrt{229}}{10} \end{cases}$

29º) $\frac{3(3x-4)}{2} = -\frac{2}{x}$

Respuesta: $\{\ x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$

30º) $\frac{2x(x-3)^2}{x-1} + x^2 - 3 = \frac{3x^3}{x-1}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{15+\sqrt{381}}{26} \\ x_2 = \frac{15-\sqrt{381}}{26} \end{cases}$

31º) $\dfrac{x}{3x+1} - \dfrac{1}{3x} = 1$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{6} \\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

32º) $4\left(\dfrac{1}{2} - x + x^2\right) = 2x^2 - 3$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 + i\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = 1 - i\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

33º) $\dfrac{(x-2)^2 - x^2}{3x} = \dfrac{2}{x} - 4 + 2x$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

34º) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}x + 3\right)(4x-1) - 3}{3x} = 6$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

35º) $2x\left(x - 2\sqrt{3}\right) - \sqrt{3}\left(2x - 4\sqrt{3}\right) = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

36º) $9x^2 + a^2 = 6ax + b^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a+b}{3} \\ x_2 = \dfrac{a-b}{3} \end{cases}$

37º) $a\left(-2x+\frac{1}{5}a\right)+5x^2=0$

Respuesta: $\left\{\ x_1=x_2=\frac{1}{5}a\right.$

38º) $x^2+\frac{5}{6}ax=a^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}a \\ x_2=-\frac{3}{2}a \end{cases}$

39º) $x(5x-2m)+\frac{1}{5}m^2=-1$

Respuesta: $\begin{cases} x_1=\frac{m+i\sqrt{5}}{5} \\ x_2=\frac{m-i\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

40º) $(a+b)^2=-4x^2+4x(a+b)$

Respuesta: $\left\{\ x_1=x_2=\frac{1}{2}(a+b)\right.$

Reconstruir las ecuaciones que tienen por raíces:

1º) $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=3 \end{cases}$ 2º) $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=7 \end{cases}$ 3º) $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \end{cases}$ 4º) $\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=6 \end{cases}$

5º) $\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{cases}$ 6º) $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-5 \end{cases}$ 7º) $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=8 \end{cases}$ 8º) $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

9º) $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-1 \end{cases}$ 10º) $\begin{cases} x_1=-12 \\ x_2=-7 \end{cases}$ 11º) $\begin{cases} x_1=-15 \\ x_2=-4 \end{cases}$ 12º) $\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=-5 \end{cases}$

13º) $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{4}{3} \end{cases}$ 14º) $\begin{cases} x_1=\frac{3}{5} \\ x_2=\frac{5}{6} \end{cases}$ 15º) $\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{1}{5} \end{cases}$ 16º) $\begin{cases} x_1=8 \\ x_2=\frac{3}{2} \end{cases}$

17º) $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{4} \\ x_1=\frac{2}{9} \end{cases}$ 18º) $\begin{matrix} x_2=\frac{7}{6} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{matrix}$ 19º) $\begin{cases} x_1=-\frac{5}{8} \\ x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$ 20º) $\begin{cases} x_1=\frac{2}{3} \\ x_2=-\frac{1}{6} \end{cases}$

21º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$ 22º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5} \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$ 23º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{6}{7} \\ x_2 = -1 \end{cases}$ 24º) $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$

25º) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{9} \end{cases}$ 26º) $\begin{cases} x_1 = -0{,}4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ 27º) $\begin{cases} x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = -1{,}2 \end{cases}$ 28º) $\begin{cases} x_1 = 1{,}5 \\ x_2 = -0{,}2 \end{cases}$

29º) $\begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = 1 - i \end{cases}$ 30º) $\begin{cases} x_1 = -3 + i \\ x_2 = -3 - i \end{cases}$ 31º) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + i \\ x_2 = \frac{1}{2} - i \end{cases}$

32º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} + i \\ x_2 = -\frac{2}{3} - i \end{cases}$ 33º) $\begin{cases} x_1 = 2 - 3i \\ x_2 = 2 + 3i \end{cases}$ 34º) $\begin{cases} x_1 = \frac{1 + 2i}{3} \\ x_2 = \frac{1 - 2i}{3} \end{cases}$

35º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + 4i \\ x_2 = -\frac{1}{2} - 4i \end{cases}$ 36º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} - \sqrt{2i} \\ x_2 = -\frac{2}{3} + \sqrt{2i} \end{cases}$ 37º) $\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{3} \\ x_2 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

38º) $\begin{cases} x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \end{cases}$ 39º) $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{5} \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{5} \end{cases}$ 40º) $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{4} i \\ x_2 = -\frac{3}{4} i \end{cases}$

8. Problemas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado con una incógnita. — Estudiaremos a continuación los tipos de estos problemas que se presentan más comúnmente.

1. DADA LA SUMA Y EL PRODUCTO DE DOS NÚMEROS, CALCULAR DICHOS NÚMEROS.

EJEMPLO:

La suma de dos números es $-\frac{3}{2}$ *y el producto es* -1. *¿Cuáles son los números?*

Representando los números buscados por x_1 y x_2, de acuerdo con los datos del problema, debe verificarse que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 x_2 = -1$$

Considerando x_1 y x_2 como raíces de una ecuación de segundo grado de la forma reducida y recordando, que en ese caso la suma de las raíces es igual al coeficiente del término de primer grado, cambiado de signo y que el producto de las mismas es igual al término independiente, puede escribirse:

$$-p = x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \quad \therefore \quad p = \frac{3}{2}$$

y $$q = x_1 x_2 = -1$$

Reconstruimos entonces la ecuación, que resulta ser:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son los números buscados:

Resolviendo dicha ecuación:

$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \therefore \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}$$

Es decir que los números buscados son $\frac{1}{2}$ y -2.

En efecto, cumplen las condiciones exigidas, pues:

$$\text{la suma } = \frac{1}{2} + (-2) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

y

$$\text{el producto } = \frac{1}{2}(-2) = -1 .$$

2º CALCULAR NÚMEROS QUE CUMPLEN CIERTAS CONDICIONES, DISTINTAS A LAS IMPUESTAS EN EL CASO ANTERIOR.

EJEMPLO 1º:

El producto de dos números naturales consecutivos disminuido en 42 es igual a 68. ¿Cuáles son los números?

Si uno de los números lo representamos por x, se comprende que el consecutivo es $x + 1$. Luego, según las condiciones impuestas, debe verificarse.

$$x(x + 1) - 42 = 68$$

Efectuando operaciones:

$$x^2 + x - 42 = 68 .$$

Pasando 68 al primer miembro:

$$x^2 + x - 42 - 68 = 0$$

o sea:

$$x^2 + x - 110 = 0 .$$

Resolviendo esta ecuación:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 110}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{21}{2} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = \frac{20}{2} = 10 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{21}{2} = -\frac{22}{2} = -11 \end{cases}$$

Como el problema pide que los números sean naturales, únicamente la primera raíz, 10, es solución del problema, debiendo descartarse la segunda por ser negativa.

Luego, si uno de los números pedidos es $x = 10$, el otro, que es el consecutivo, es:

$$x + 1 = 10 + 1 = 11$$

EJEMPLO 2º:

¿Cuál es el mayor de los números que cumplen la condición de que el duplo de su cuadrado, menos 20, es igual al triplo del número?

Indicando con x el número, las condiciones del problema se expresan en la relación:

$$2x^2 - 20 = 3x$$

o sea:

$$2x^2 - 20 - 3x = 0$$

ordenando:

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

Resolviendo esta ecuación:

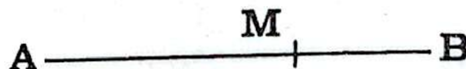
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 13}{4} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 + 13}{4} = \dfrac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \dfrac{3 - 13}{4} = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Como 4 es mayor que $-\frac{5}{2}$, de estas dos raíces, la primera es la solución del problema.

3º Aplicaciones a la geometría.

a) *Dada la longitud de un segmento, calcular la longitud de cada uno de los dos segmentos que quedan determinados al dividir el primero en media y extrema razón.*



Así, por ejemplo, si el segmento $\overline{AB}$ es de 12 cm, calcular la longitud de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$, siendo M el punto que divide al segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón.

Decir que el punto M divide al $\overline{AB}$ en media y extrema razón significa que se verifica la proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \qquad [1]$$

Siendo en este caso el $\overline{AB}$ de 12 cm

haciendo: $\overline{AM} = x$

es: $\overline{MB} = 12\text{ cm} - x$

Luego, reemplazando en [1]:

$$\frac{12\text{ cm}}{x} = \frac{x}{12\text{ cm} - x}$$

y como en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos, se tiene:

$$x\,x = 12\text{ cm}\,(12\text{ cm} - x)$$

Efectuando las operaciones:

$$x^2 = 144\text{ cm}^2 - 12\text{ cm}\,x$$

Pasando todos los términos del segundo miembro al primero:

$$x^2 - 144\text{ cm}^2 + 12\text{ cm}\,x = 0$$

o sea, ordenando:

$$x^2 + 12\text{ cm}\,x - 144\text{ cm}^2 = 0\,.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se tiene:

$$x = -\,6\text{ cm} \pm \sqrt{36\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2}$$

$$x = -\,6\text{ cm} \pm \sqrt{180\text{ cm}^2}$$

$$x = -\,6\text{ cm} \pm 13{,}4\text{ cm} \;\therefore\; \begin{cases} x_1 = -\,6\text{ cm} + 13{,}4\text{ cm} = 7{,}4\text{ cm} \\ x_2 = -\,6\text{ cm} - 13{,}4\text{ cm} = -\,19{,}4\text{ cm}\,. \end{cases}$$

De estas dos raíces solamente es solución la primera, pues no tiene sentido hablar de una longitud negativa.

Luego:

Si $\overline{AM} = x = 7{,}4 \text{ cm}$

es $\overline{MB} = 12 \text{ cm} - x = 12 \text{ cm} - 7{,}4 \text{ cm} = 4{,}6 \text{ cm}$

b) *Conocida la superficie y el perímetro de un rectángulo, calcular la base y la altura.*

Designando con x_1 la base del rectángulo y con x_2 la altura del mismo, conocer la superficie del mismo equivale a conocer el producto $x_1 x_2$, y conocer el perímetro significa conocer el duplo de la suma $(x_1 + x_2)$, en consecuencia, la suma $(x_1 + x_2)$. Pero, conocidos el producto y la suma de dos números, pueden calcularse estos números, según ya se ha visto.

EJEMPLO:

Calcular las dimensiones de un rectángulo tal que su superficie es de 3 m^2 y su perímetro de 7 m.

Llamando, como hemos dicho, x_1 y x_2 los lados, se tiene:

$$\text{Sup.} = x_1 x_2 = 3 \text{ m}^2$$
$$\text{Per.} = 2(x_1 + x_2) = 7 \text{ m} \quad \therefore \quad x_1 + x_2 = 3{,}5 \text{ m}.$$

Prescindiendo de la denominación metros y recordando que:

$$-p = x_1 + x_2 = 3{,}5 \quad \therefore \quad p = -3{,}5$$

y que:

$$q = x_1 x_2 = 3$$

podemos plantear la ecuación:

$$x^2 - 3{,}5\,x + 3 = 0$$

Resolviendo:

$$x = \frac{3,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,5}{2}\right)^2 - 3}$$

$$x = \frac{35}{20} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{20}\right)^2 - 3}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - 3}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

Como los datos están expresados en metros, resulta que los lados del rectángulo son de 2 m y 1,5 m.

c) *Determinar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus dimensiones son números consecutivos.*

Designando el cateto menor por x, como la hipotenusa en el mayor de los lados y los tres, según la condición del problema tienen que ser números consecutivos, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{cateto menor} &= x \\ \text{cateto mayor} &= x + 1 \\ \text{hipotenusa} &= x + 2 \end{aligned}$$

Recordando que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2$$

Desarrollando los cuadrados de binomios indicados:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x^2 + 2x + 1$$

Pasando todos los términos al primer miembro:

$$x^2 + 4x + 4 - x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

o sea, multiplicando ambos miembros por (-1)

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolviendo:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 1 \pm 2 \quad \therefore \begin{cases} x_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

De estas dos raíces, únicamente la primera es solución, pues no puede considerarse un lado de un triángulo de dimensión negativa.

Luego:

si el cateto menor es x $= 3$ unidades

el cateto mayor es $x + 1$ $= 4$ unidades

y la hipotenusa es $x + 2$ $= 5$ unidades.

4º Aplicaciones a la física.

En Física se representan también algunos problemas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado.

Así, por ejemplo: *Calcular el tiempo en que un móvil animado con movimiento uniformemente variado recorre un determinado espacio, e, cuando se conoce la velocidad inicial,* v_0*, y la aceleración,* a.

Recordemos que la fórmula que da el espacio recorrido por un móvil con movimiento uniformemente acelerado es:

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

En nuestro problema nos proponemos calcular t, cuando se conocen e, v_0 y a.

Pasando todos los términos al primer miembro:

$$e - v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 0$$

ordenando según las potencias decrecientes de t:

$$-\frac{1}{2} a t^2 - v_0 t + e = 0$$

o sea, multiplicando ambos miembros por (− 1), resulta:

$$\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - e = 0 \qquad [1]$$

ecuación de segundo grado cuya incógnita es t.

Resolviéndola, obtenemos la solución del problema.

Sea, por ejemplo, calcular el tiempo en que un móvil animado con un movimiento uniformemente acelerado ha recorrido 384 m, sabiendo que la velocidad inicial es de 80 $\frac{cm}{seg}$ y la aceleración de 4 $\frac{cm}{seg^2}$.

En este ejemplo: $a = \frac{4\ \text{cm}}{\text{seg}^2}$; $v_0 = 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$ y $e = 384\ \text{m}$.

Reemplazando en [1], se tiene:

$$\frac{1}{2} \times 4\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\, t^2 + 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}\, t - 384\ \text{m} = 0$$

Para resolver el problema es necesario expresar todas las cantidades en unidades correspondientes. Estando la aceleración expresada en $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$ y la velocidad inicial en $\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$, expresaremos el espacio en cm, y como 384 m es igual a 38 400 cm, se tiene:

$$\frac{1}{2} \times 4\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\, t^2 + 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}\, t - 38\,400\ \text{cm} = 0$$

y simplificando en el primer término:

$$2\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\, t^2 + 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}\, t - 38\,400\ \text{cm} = 0$$

Ésta es una ecuación completa general de segundo grado, es decir, de la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

donde:

$$a = 2\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \quad ; \quad b = 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}, \quad \text{y} \quad c = -\ 38\,400\ \text{cm}\ .$$

Luego, aplicando la fórmula que resuelve dicha ecuación, se tiene:

$$t = \frac{-\ 80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \pm \sqrt{\left(80\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}}\right)^2 + 4 \times 2\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \times 38\,400\ \text{cm}}}{2 \times 2\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}}$$

$$t = \frac{-80\,\dfrac{cm}{seg} \pm \sqrt{6\,400\,\dfrac{cm^2}{seg^2} + 307\,200\,\dfrac{cm^2}{seg^2}}}{4\,\dfrac{cm}{seg^2}}$$

$$t = \frac{-80\,\dfrac{cm}{seg} \pm \sqrt{313\,600\,\dfrac{cm^2}{seg^2}}}{\dfrac{4\ cm}{seg^2}}$$

$$t = \frac{-80\,\dfrac{cm}{seg} \pm 560\,\dfrac{cm}{seg}}{\dfrac{4\ cm}{seg^2}}$$

$$t_1 = \frac{-80\,\dfrac{cm}{seg} + 560\,\dfrac{cm}{seg}}{4\,\dfrac{cm}{seg^2}} = \frac{480\,\dfrac{\cancel{cm}}{\cancel{seg}}}{4\,\dfrac{\cancel{cm}}{\cancel{seg^2}}}$$

$$t_1 = 120\ seg = 2\ min.$$

$$y \qquad t_2 = \frac{-80\,\dfrac{cm}{seg} - 560\,\dfrac{cm}{seg}}{4\,\dfrac{cm}{seg^2}} = \frac{-640\,\dfrac{\cancel{cm}}{\cancel{seg}}}{4\,\dfrac{\cancel{cm}}{\cancel{seg^2}}}$$

$$t_2 = -160\ seg.$$

De estas dos raíces, la única solución es la primera, pues no tiene sentido decir que el móvil emplea un tiempo negativo para recorrer un espacio.

Luego, el móvil empleó 2 minutos en recorrer ese espacio.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Calcular los números cuya suma y producto son:

1º) Suma: -4; producto: 1
2º) Suma: -2; producto: 6
3º) Suma: 5; producto: 6
4º) Suma: 2; producto: $\frac{5}{9}$
5º) Suma: 2; producto: 6
6º) Suma: $\frac{5}{2}$; producto: $-\frac{3}{2}$
7º) Suma: -6; producto: 25
8º) Suma: $5i$; producto: -6
9º) Suma: 0; producto: -4
10º) Suma: $\frac{13}{10}$; producto: $\frac{2}{5}$
11º) Suma: 6; producto: 10
12º) Suma: $1,75$; producto: $-\frac{3}{8}$
13º) Suma: -2; producto: -3
14º) Suma: $\frac{3}{8}$; producto: -1
15º) Suma: $\frac{7}{3}$; producto: -2
16º) Suma: $\frac{5}{6}$; producto: -1
17º) Suma: $-\frac{1}{2}$; producto: -3
18º) Suma: $\frac{2a^2-3}{a}$; producto: -6
19º) Suma: 0; producto: $-\frac{1}{4}$
20º) Suma: $\frac{3}{2}$; producto: $\frac{5}{6}$
21º) Suma: 1; producto: $\frac{37}{4}$
22º) Suma: $-\frac{5}{4}m$; producto: $-\frac{1}{5}m^2$
23º) Suma: 10; producto: 25
24º) Suma: a; producto: $\frac{a^2-b^2}{2}$
25º) Suma: 4; producto: -21
26º) Suma: $-\frac{17}{3}$; producto: $\frac{10}{3}$
27º) Suma: $5i$; producto: -6
28º) Suma: $-2x$; producto: x^2-4

PROBLEMAS.

1º) ¿Cuáles son los números enteros que cumplen la condición de que su cuadrado más el duplo del consecutivo es igual a 677?

Respuesta: 25 y −27.

2º) ¿Cuál es el número natural que sumado al cuadrado de su consecutivo da 109?

Respuesta: 9.

3º) ¿Cuál es el número natural tal que la mitad del producto por su consecutivo es igual a 136?

Respuesta: 16.

4º) La cuarta parte de un número, multiplicada por ese número aumentado en dos unidades, es igual a seis veces dicho número más la mitad del mismo. ¿Cuáles son los números que cumplen esa condición?

Respuesta: 0 y 24.

5º) Si del número 32 se resta el producto del duplo de un número por sí mismo, el resultado obtenido es igual a seis veces ese número disminuido en 24 unidades. ¿Cuál es el número entero que cumple esa condición?

Respuesta: 8.

6º) Si al triplo de un número se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene el duplo del mismo número. ¿Cuáles son los números que cumplen esa condición?

Respuesta: 0 y −2.

7º) La suma de los cuadrados de tres números naturales y pares, consecutivos, es igual a 200. ¿Cuáles son esos números?

Respuesta: 6, 8 y 10.

8º) La suma de los cuadrados de tres números positivos consecutivos es igual a 31 214. ¿Cuáles son esos números?

Respuesta: 101, 102 y 103.

9º) Dos números naturales impares y consecutivos son tales que la diferencia entre el cuadrado del menor menos el cuadrado del mayor, es igual a la diferencia entre el cuadrado del número par comprendido entre ellos y el número 60. ¿Cuáles son esos números?

Respuesta: 5 y 7.

10º) La suma de dos números es 1, y la de sus cuadrados es 13. ¿Cuáles son los números?

Respuesta: 3 y -2.

11º) La suma de dos números es -14, y la suma de sus cuadrados es 106. ¿Cuáles son los números?

Respuesta: -5 y -9.

12º) La suma de dos números es 5, y la razón de sus cuadrados es 4. ¿Cuáles son los números enteros que cumplen esa condición?

Respuesta: 10 y -5.

13º) El producto de dos números es 10; el primero de ellos es igual al duplo del otro más uno. ¿Cuáles son los números positivos que cumplen esa condición?

Respuesta: 5 y 2.

14º) El cuádruplo de la suma de un número, más el duplo de su inverso, es igual a 33. ¿Cuáles son los números que cumplen esa condición?

Respuesta: 8 y $\frac{1}{4}$

15º) Dividir el número 24 en dos partes positivas tales que la razón de sus cuadrados sea igual a $\frac{1}{4}$.

Respuesta: 8 y 16.

16º) Dividir el número $\frac{5}{6}$ en dos partes positivas tales que la razón de sus cuadrados sea igual a 16.

Respuesta: $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$.

17º) La superficie de un rectángulo es de 108 cm^2. Sabiendo que uno de los lados es igual a los $\frac{4}{3}$ del otro, calcular las dimensiones del rectángulo.

Respuesta: 9 cm y 12 cm.

18º) La superficie de un rectángulo es de 3,84 m^2, y el perímetro de 8 m. Calcular las dimensiones del rectángulo.

Respuesta: 2,4 m y 1,6 m.

19º) La superficie de un triángulo es de 60 cm^2. ¿Cuál es la altura, sabiendo que tiene 2 cm más que la base?

Respuesta: 12 cm.

20º) En un triángulo rectángulo, el cateto menor es igual a los $\frac{3}{4}$ del cateto mayor y es 6 unidades menor que la hipotenusa. Calcular los tres lados del triángulo.

Respuesta: 9, 12 y 15.

21º) La superficie de una corona circular es de 62,80 cm^2. Calcular el radio mayor y el radio menor, sabiendo que la corona tiene 2 cm de ancho. (Considérese $\pi = 3,14$).

Respuesta: $R = 6$ cm y $r = 4$ cm.

22º) Calcular la distancia de un punto P al centro O de una circunferencia, sabiendo que: Pot. $P_{O(o\ y\ r)} = 144\ cm^2$, una secante trazada por P determina una cuerda AB de 10 cm, y que siendo A el extremo de la cuerda más próximo a P, se verifica que PA es igual a la distancia buscada menos 7 cm.

Respuesta: 15 cm.

23º) Calcular un cateto de un triángulo rectángulo tal, que tiene 6 cm más que su proyección sobre la hipotenusa, y que ésta es de 25 cm.

Respuesta: 15 cm.

24º) Calcular la longitud de los segmentos que quedan determinados al dividir en media y extrema razón:

a) Un segmento de 18 cm

b) Un segmento de 46 cm

c) Un segmento de 35 cm

d) Un segmento de 8 cm

25º) Calcular el tiempo que tarda un móvil, animado con movimiento uniformemente acelerado, en recorrer 1 044 m, sabiendo que la velocidad inicial es de $40 \frac{cm}{seg}$, y la aceleración de $6 \frac{cm}{seg^2}$

Respuesta: 3 min.

26º) Resolver el mismo problema anterior, cuando el espacio recorrido es de 1 890 m; la velocidad inicial de $30 \frac{cm}{seg}$, y la aceleración de $4 \frac{cm}{seg^2}$.

Respuesta: 5 min.

27º) Calcular la distancia a que se encuentra un foco de 64 bujías, si produce sobre una pantalla igual iluminación que otro de 100 bujías, colocado 2 m más lejos de la misma.

Respuesta: 8 m.

28º) Un péndulo tiene una longitud igual $\frac{225}{256}$ de la longitud de otro. Calcular el tiempo de oscilación simple de cada uno, sabiendo que el del primer péndulo es 1 seg. menor que el del segundo.

Respuesta: 15 seg. y 16 seg.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN RACIONAL ENTERA DE SEGUNDO GRADO.

9. Para que una función sea racional, es necesario que la variable independiente no figure bajo el signo radical, es decir, aparezca solamente con exponente entero; para que sea entera, es necesario que la variable independiente no figure en el denominador, y para que sea de segundo grado, dicha variable independiente tiene que figurar a la segunda potencia y no a un grado mayor.

Por lo tanto, en general, una función racional entera de segundo grado es de la forma:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

o sea, el 2º miembro es un trinomio de 2º grado, pero puede faltar el término de primer grado en x o el término independiente, o los dos simultáneamente.

Así, por ejemplo, son funciones racionales enteras de segundo grado:

1º) $y = 3\,x^2 + 2\,x - 5$

2º) $y = x^2 - \frac{1}{3}$

3º) $y = \frac{-\,x^2 - 4\,x}{7}$

4º) $y = 2\,x^2$

10. Representación gráfica de la función racional entera de segundo grado. Parábola. — Según sabemos, para representar una función es necesario construir primero la tabla de valores y luego determinar con respecto a un sistema de ejes coordenados, los puntos que tienen por coordenadas cada valor de x y su correspondiente de y.

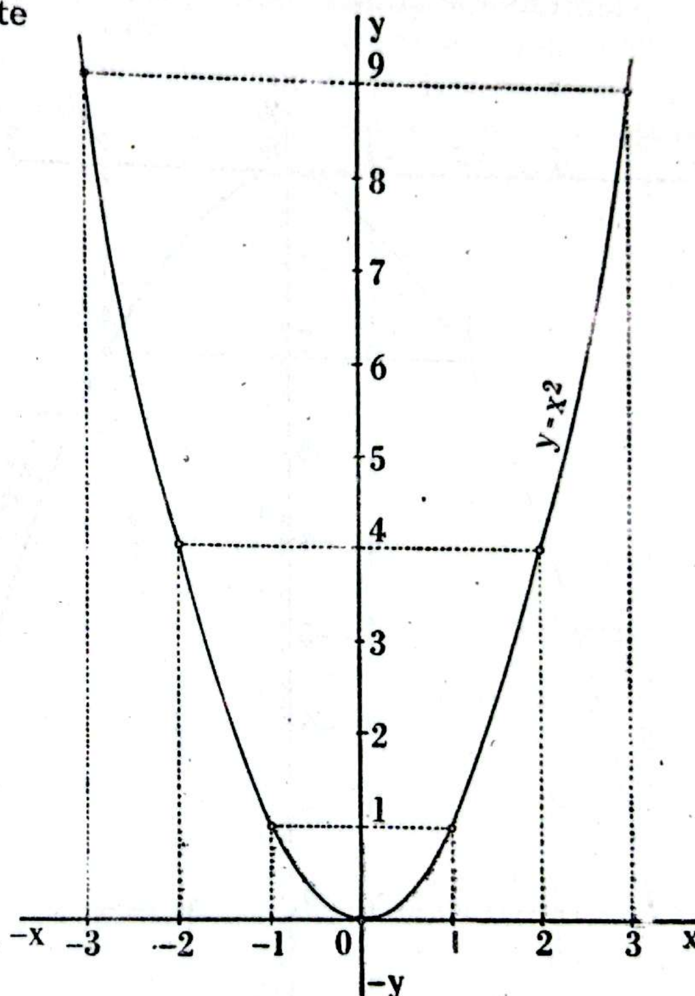
A continuación trazamos la gráfica de algunas funciones racionales enteras de segundo grado.

EJEMPLO 1º:

Representar gráficamente (ver figura) la función:

$$y = x^2$$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
—1	1
—2	4
—3	9



Se observa:

PRIMERO. Que la curva pasa por el origen, que es, en este caso, el punto de menor ordenada de la curva; por eso se dice que en ese punto la función tiene un *mínimo*.

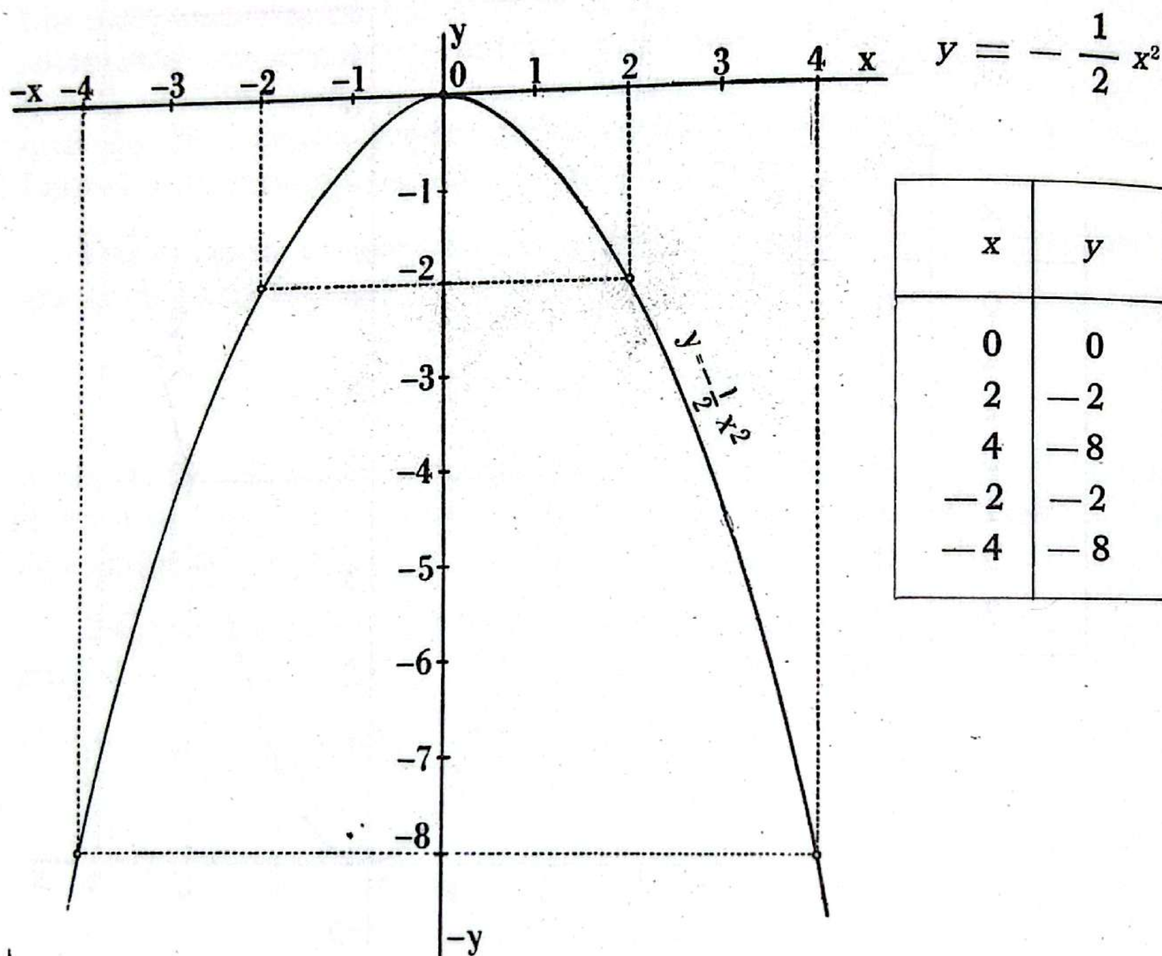
SEGUNDO. Que la curva es simétrica con respecto al eje de ordenadas, porque a valores de x, iguales en valor absoluto pero de signo distinto, corresponden iguales valores positivos de y.

TERCERO. Que la función crece indefinidamente a medida que crecen los valores absolutos de x.

EJEMPLO 2º:

Representar gráficamente (ver figura siguiente) la función:

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$



x	y
0	0
2	—2
4	—8
—2	—2
—4	— 8

En este ejemplo, como en el anterior, la y se anula para $x = 0$, por lo tanto la curva pasa por el origen. También para valores opuestos de x corresponden iguales valores de y pero negativos,

porque en este caso $\frac{1}{2}x^2$ está precedido por el signo menos; luego la curva es simétrica con respecto al eje de las y, está en el semiplano inferior con respecto al eje de las x y la concavidad está dirigida hacia abajo.

En este ejemplo el origen es el punto de mayor ordenada, por lo cual se dice que en ese punto la función alcanza un *máximo.*

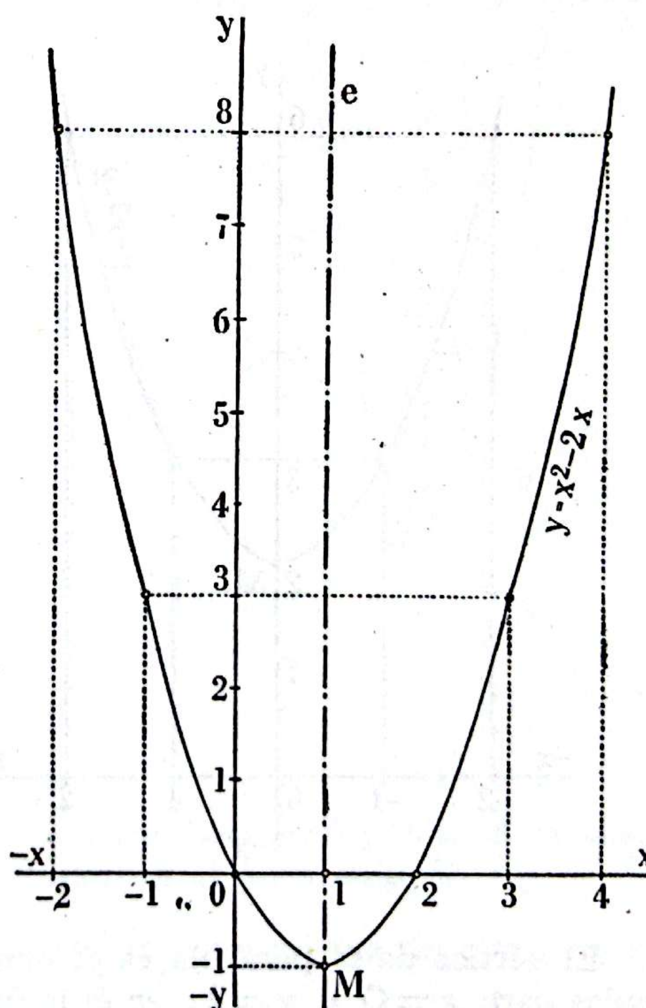
Cada una de las curvas que hemos obtenido en los dos ejemplos anteriores así como la representación gráfica de toda función racional entera de 2º grado, recibe el nombre de *parábola*; el punto en que la función alcanza el máximo o el mínimo se llama *vértice* de la parábola; en los dos casos anteriores el vértice es el origen. Cada una de las partes en que el vértice divide la curva se llama *rama* de la parábola.

EJEMPLO 3º:

Representar gráficamente (ver figura) la función:

$$y = x^2 - 2x$$

x	y
0	0
1	−1
2	0
3	3
4	8
−1	3
−2	8



En este caso, el vértice de la parábola es el punto M, de abscisa $x = 1$, donde la función alcanza el valor mínimo.

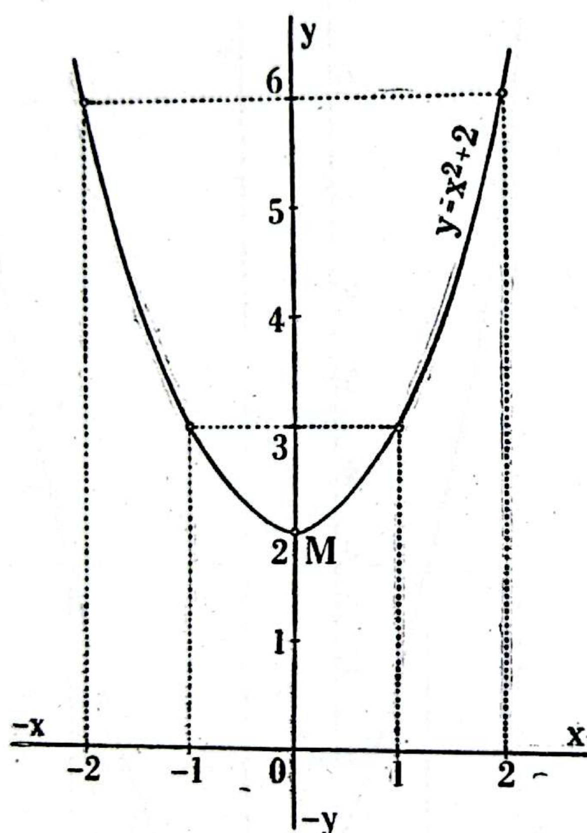
La parábola es simétrica con respecto a la recta e, que pasa por el vértice M, y es paralela al eje de ordenadas. Esta recta e se llama *eje de la parábola.*

En las dos primeras parábolas el eje de las mismas coincide con el eje de ordenadas.

Ejemplo 4º:

Representar gráficamente (ver figura siguiente) la función:

$$y = x^2 + 2$$



x	y
0	2
1	3
2	6
—1	3
—2	6

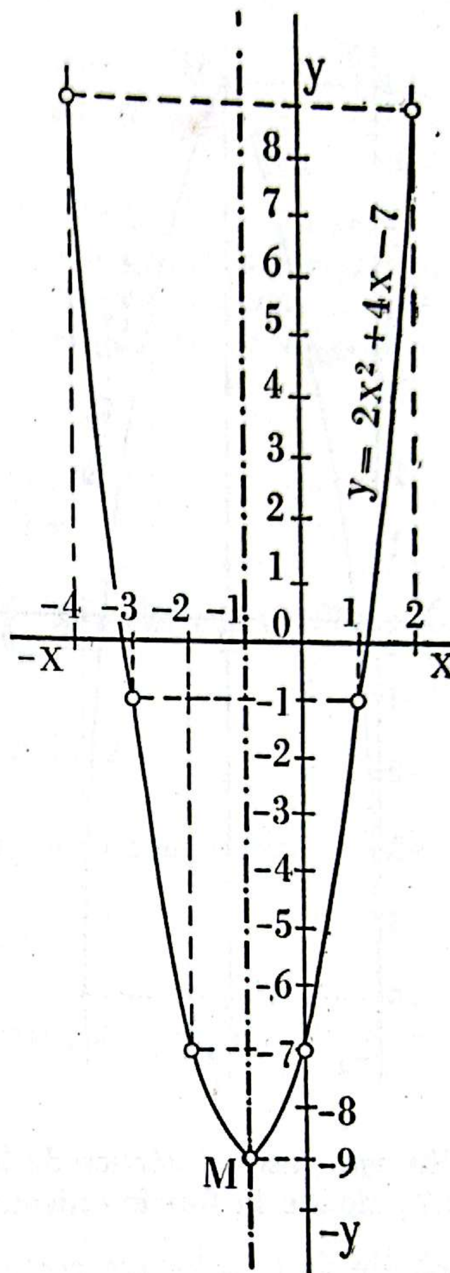
El vértice de la parábola es el punto M, sobre el eje de ordenadas para $x = 0$ e $y = 2$; en él la función alcanza el mínimo.

Ejemplo 5º:

Representar gráficamente (ver figura al margen) la función:

$$y = 2x^2 + 4x - 7$$

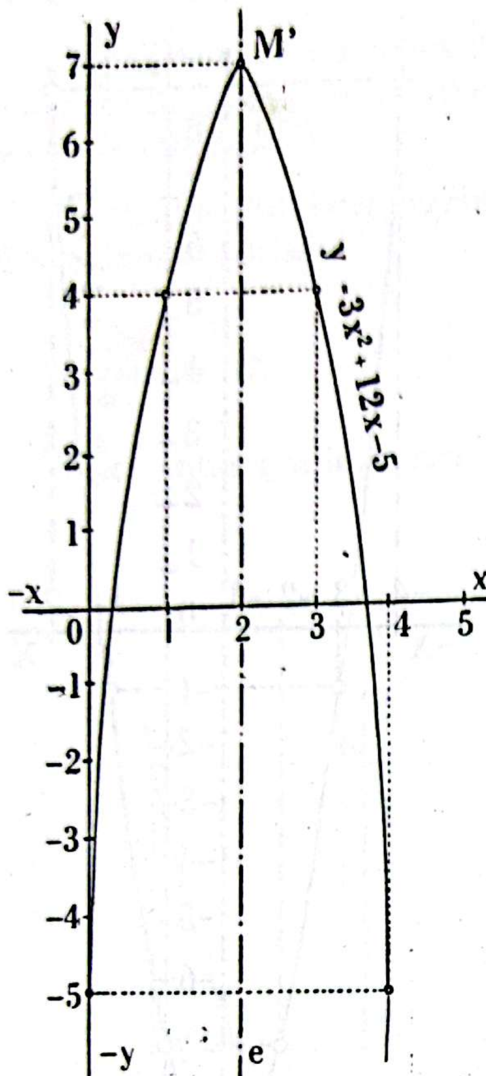
x	y
0	—7
1	—1
2	9
—1	—9
—2	—7
—3	—1
—4	9



En este caso el vértice de la parábola es el punto M de abscisa $x = -1$, donde la función alcanza el valor mínimo.

El eje de la parábola corta entonces al eje de abscisas en el punto de abscisa $x = -1$.

EJEMPLO 6º:



Representar gráficamente (ver figura al margen) la función:

$$y = -3x^2 + 12x - 5$$

x	y
0	−5
1	4
2	7
3	4
4	−5

En este caso, el vértice de la parábola es el punto M, de abscisa $x = 2$, donde la función alcanza el valor *máximo*.

El eje de la parábola corta, pues, al eje de abscisas en el punto de abscisa $x = 2$.

11. OBSERVACIONES. De las representaciones gráficas anteriores deducimos que, cuando el término de segundo grado es positivo, la función tiene un mínimo, y cuando es negativo, la función alcanza un máximo.

En algunos casos observamos que la parábola corta al eje de las x en dos puntos; ellos corresponden a los valores de la ordenada y

iguales a cero. Ahora bien la función racional entera de segundo grado igualada a cero, es:

$$y = a x^2 + b x + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado. Luego, esos puntos en que la parábola corta al eje de las x, que corresponden a y igual a cero tienen por abscisa los valores de x que anulan la función, es decir, son las raíces de la ecuación que resulta al igualar a cero la función.

Así, por ejemplo, en la función:

$$y = x^2 - 2x$$

que hemos representado en la figura de pág. 307, la parábola corta al eje de abscisas en los puntos:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2 .$$

Ahora bien, si igualamos a cero la función, es decir, hacemos:

$$x^2 - 2x = 0$$

y resolvemos esta ecuación, las raíces que resultan son efectivamente 0 y 2.

12. Por otra parte, al observar las parábolas obtenidas, que cortan al eje de las x en dos puntos, vemos que el punto medio del segmento determinado por las intersecciones de la parábola con el eje de las x, da la abscisa del vértice de la parábola, es decir, el valor de x, correspondiente al máximo o mínimo de la función.

Así, en el ejemplo 3º que acabamos de mencionar, el punto medio entre $x = 0$ y $x = 2$, del eje de abscisas, es:

$$x = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

que es la abscisa del vértice.

Luego, para obtener el valor de x que hace máxima o mínima la función, basta hallar la semisuma de las raíces de la ecuación que resulta al igualar a cero la función.

Ahora bien, recordando que la suma de las raíces de una ecuación general de segundo grado es $-\frac{b}{a}$ la mitad de esa suma es $-\frac{b}{2a}$; luego, el valor de x que hace máxima o mínima la función es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

es decir, igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo dividido por el duplo del coeficiente del término de segundo grado.

Según lo que hemos visto, dada la función:

$$y = 4x^2 - 3x - 1$$

sabemos que esta función alcanza un mínimo, por ser positivo el término de segundo grado. Ese mínimo corresponde al valor de x:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Como en este caso $b = -3 \therefore -b = 3$

y $a = 4$, se tiene:

$$x = \frac{3}{2 \times 4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

es decir, que para $x = 0{,}375$ la función tiene el valor mínimo.

La parábola representativa de esta función corta al eje de las x, en los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación que se obtiene igualando a cero la función, es decir:

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

Como $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8}$

$$x = \frac{3 \pm 5}{8} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{8} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3-5}{8} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas están dados por

$$x = 1 \quad y \quad x = -\frac{1}{4}$$

13. En estas consideraciones, hemos tenido en cuenta los casos en que la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos, pero hemos obtenido también parábolas tangentes al eje de las x y otras que no tienen ningún punto común con el eje de abscisas.

Cuando la parábola es tangente al eje de las x, significa que las dos raíces de la ecuación que resulta al igualar a cero la función, se confunden en una sola, o sea que dicha ecuación tiene una raíz doble, que es la abscisa del punto de tangencia, y que da el máximo o mínimo de la función.

Cuando la parábola no corta al eje de las x, significa que la ecuación que resulta al igualar a cero la función no tiene raíces reales, y por lo tanto las dos raíces de la ecuación deben ser imaginarias.

14. **Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado.** — Según lo que acabamos de ver, para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado, se representa la parábola de la función correspondiente. Si dicha parábola corta al eje de las x en dos puntos, la ecuación tiene dos raíces reales que son las abscisas de esos dos puntos.

Si la parábola es tangente al eje de las x, la ecuación tiene una raíz doble, que es la abscisa del punto de tangencia, y finalmente, si la parábola no corta al eje de las x, las raíces de la ecuación son imaginarias.

EJEMPLO 1º:

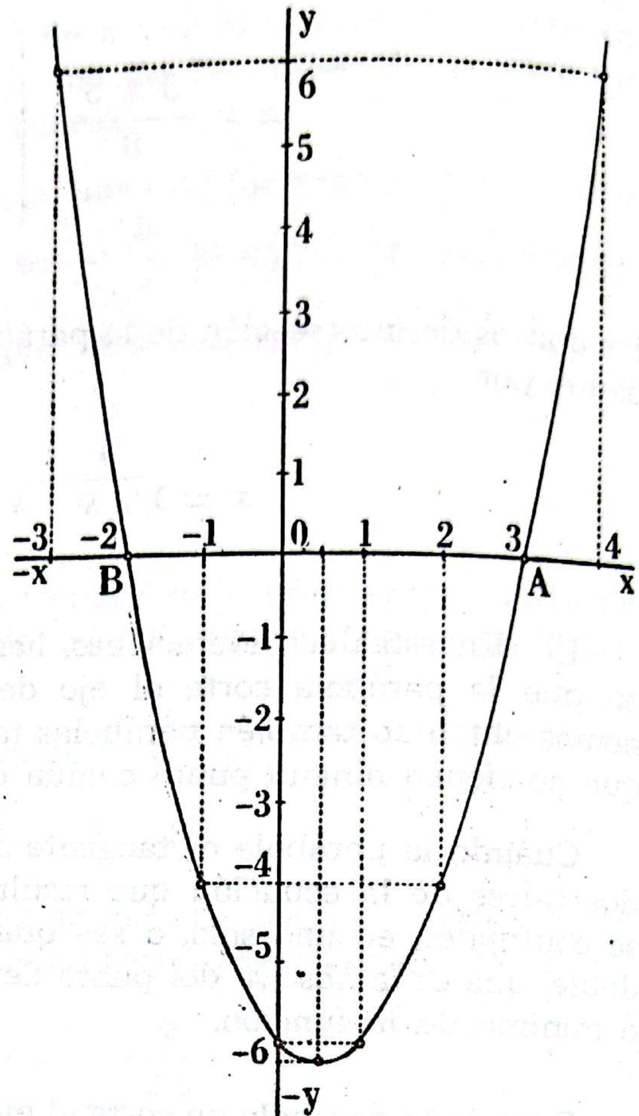
Resolver gráficamente (ver figura) la ecuación:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Se representa la función:

$$y = x^2 - x - 6$$

x	y
0	-6
$\frac{1}{2}$	$-6{,}25$
1	-6
2	-4
3	0
4	6
-1	-4
-2	0
-3	6



Como la parábola corta al eje de las x, en los puntos A y B de abscisas $x = 3$ y $x = -2$, las raíces de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.

En efecto si se resuelve analíticamente la ecuación se obtienen las mismas raíces.

EJEMPLO 2º:

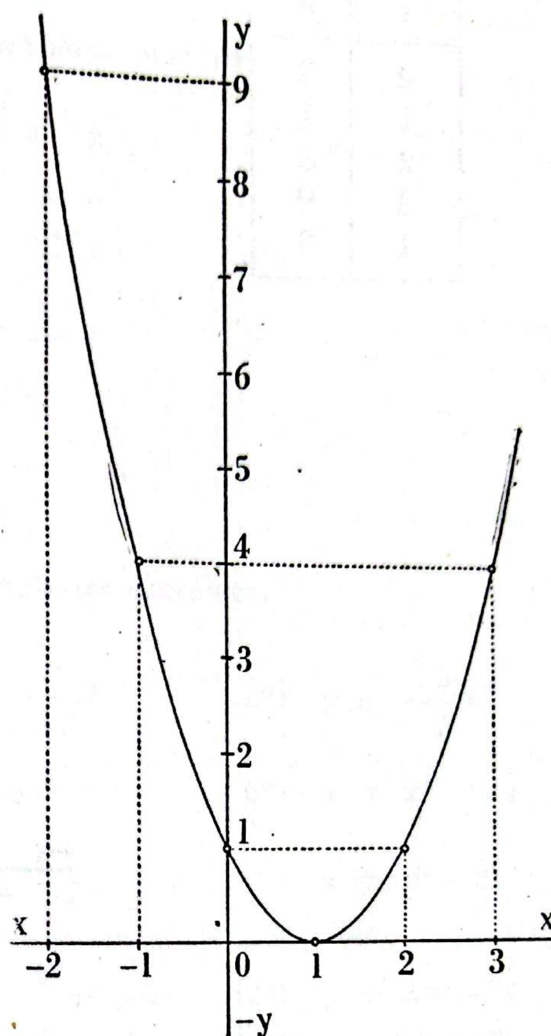
Resolver gráficamente (ver fig. siguiente) la ecuación:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Se representa la función:

$$y = x^2 - 2x + 1$$

x	y
0	1
1	0
2	1
3	4
—1	4
—2	9



Como la parábola es tangente al eje de abscisas en el punto $x = 1$, la ecuación tiene la raíz doble $x_1 = x_2 = 1$.

Ejemplo 3º:

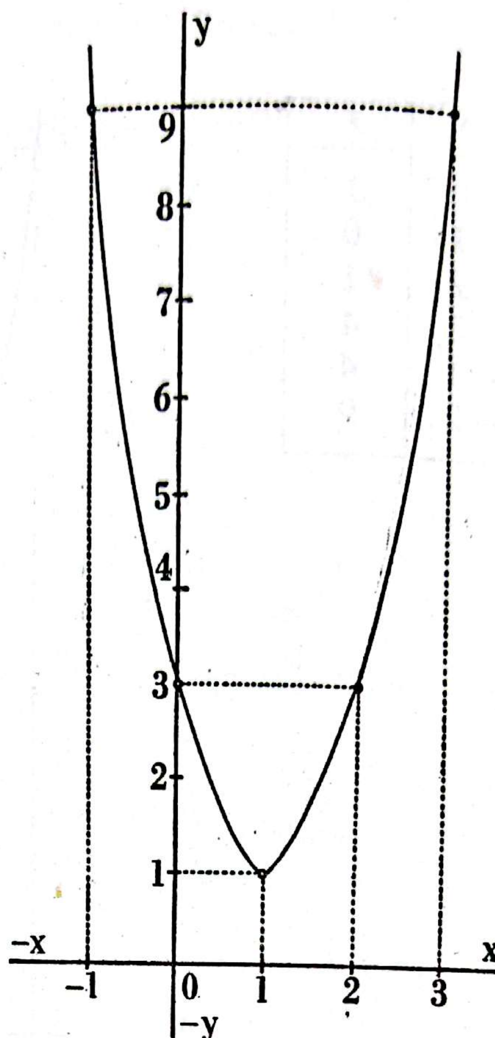
Resolver gráficamente (ver fig. siguiente) la ecuación:

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

Representamos la función:

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$

x	y
0	3
1	1
2	3
3	9
—1	9



Como la parábola no corta al eje de abscisas, la ecuación resulta con raíces imaginarias.

Efectivamente: si se resuelve analíticamente la ecuación se obtienen las raíces

$$x_1 = 1 + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = 1 - \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Representar gráficamente las siguientes funciones:

1º) $y = 2x + 5$ 2º) $y = x - 2$ 3º) $y = \frac{1}{2}x$

4º) $y = \frac{1}{5}x$ 5º) $y = 0{,}25\,x$ 6º) $y = 5x + 1$

7º) $y = 0{,}1 - 3x$ 8º) $y = 2x$ 9º) $y = x - 1$

10º) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Representar gráficamente las siguientes funciones:

1º) $y = 2x^2$ 2º) $y = \frac{1}{3}x^2$ 3º) $y = -\frac{3}{2}x^2$

4º) $y = -x^2$ 5º) $y = x^2 - x$ 6º) $y = x^2 - 3x$

7º) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x$ 8º) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ 9º) $y = x^2 - 1$

10º) $y = -x^2 + 3$ 11º) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 12º) $y = 3x^2 + 4$

13º) $y = x^2 - x - 1$ 14º) $y = x^2 - 2x + 2$

15º) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$ 16º) $y = -2x^2 + \frac{1}{4}x - 5$

17º) $y = x^2 - x - 5$ 18º) $y = x^2 + 3x + 4$

19º) $y = -x^2 + 2x - 4$ 20º) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

PROBLEMAS.

1º) Determinar el valor de la abscisa que hace máxima o mínima cada una de las funciones anteriores.

2º) Resolver gráficamente las ecuaciones que se obtienen al igualar a cero cada una de las funciones dadas.

3º) Dar ejemplos de funciones racionales enteras de segundo grado que alcancen un máximo.

4º) Dar ejemplos de funciones racionales enteras de segundo grado que alcancen un mínimo.

ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE 2º GRADO.

15. Ecuaciones bicuadradas. — Se llaman *ecuaciones bicuadradas* con una incógnita, las que tienen un término de cuarto grado en esa incógnita, un término de segundo grado en la misma, y un término independiente.

EJEMPLO:

$$a x^4 + b x^2 + c = 0$$

es una ecuación bicuadrada en x.

Esta ecuación se resuelve como una ecuación de segundo grado, teniendo en cuenta que puede escribirse:

$$a (x^2)^2 + b (x^2) + c = 0 .$$

que resulta ser una ecuación de segundo grado cuya incógnita es x^2.

Luego, resolviendo dicha ecuación, se tiene:

$$x^2 = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} .$$

Para obtener x, es necesario extraer la raíz cuadrada de ambos miembros; luego:

o

$$x = \pm \sqrt{\frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}}$$

y combinando los dobles signos de los radicales, resultan las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada.

$$x_1 = + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

OBSERVACIÓN. Si el coeficiente del término de cuarto grado es 1, es decir: la ecuación es de la forma

$$x^4 + p x^2 + q = 0$$

razonando como en el caso anterior, se llega al valor general de las raíces

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

de donde, combinando los dobles signos, se obtienen las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada reducida.

$$x_1 = + \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_2 = + \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_3 = - \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$x_4 = - \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

EJEMPLO 1º:

$$4x^4 - 35x^2 + 9 = 0$$

Aplicando la fórmula que corresponde a la ecuación bicuadrada en general, se tiene:

$$x = \pm\sqrt{\frac{35 \pm \sqrt{35^2 + 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{35 \pm \sqrt{1\,225 + 144}}{8}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{35 \pm \sqrt{1\,369}}{8}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{35 \pm 37}{8}}$$

luego las cuatro raíces son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{35 + 37}{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{35 - 37}{8}} = \sqrt{-\frac{2}{8}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}i$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{35 + 37}{8}} = -3$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{35 - 37}{8}} = -\frac{1}{2}i$$

EJEMPLO 2º:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Aplicando la fórmulá que resuelve la ecuación bicuadrada reducida, se tiene:

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}$$

Luego las cuatro raíces son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} = -2$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} = -1$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

1º) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2º) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

3º) $x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

4º) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$

5º) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

6º) $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

7º) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

8º) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

9º) $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$

10º) $64x^4 - 52x^2 + 9 = 0$

11º) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

12º) $9x^4 + 32x^2 - 16 = 0$

13º) $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right)^2 = x^2 - 3$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{12} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -\sqrt{12} \\ x_4 = -2 \end{cases}$

14º) $x^3(x^2 - 2) = 3x^4 + 8(1 + x^2)$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = 2i \\ x_3 = -i \\ x_4 = -2i \end{cases}$

15º) $x^2 = \dfrac{x^2 + 12(x^2 - 3)}{x^2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = -2 \end{cases}$

16º) $x^2(x + 2)(x - 2) + 1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

17º) $x^2 + 5 - \frac{2}{x^2} = -\frac{(1 + x^2)}{2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_2 = 2i \\ x_3 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_4 = -2i \end{cases}$

18º) $\frac{(x^2 - 2)^2}{2} = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$

19º) $2x^2(x^2 - 1) = 3(1 - x^2) - 2x^4$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = i \\ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_4 = -i \end{cases}$

20º) $\frac{x(x + 2) - 8}{x - 2} + \frac{(x + 1)^2 - 1}{x^2} = 3 + \frac{x - 2}{x^2}$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = i \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -i \end{cases}$

21º). $$\frac{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)4}{x^2 - \sqrt{3}} = x^2 + \sqrt{3}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = i \\ x_3 = -\sqrt{5} \\ x_4 = -i \end{cases}$

22º). $$\frac{\frac{1}{2}x^2 - x}{3x + 6} = \frac{x - 2}{2x^2 + 4x}$$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_3 = \sqrt{3} \\ x_2 = -2 \\ x_4 = -\sqrt{3} \end{cases}$

16. Ecuaciones recíprocas. — Se llaman así, por definición, las ecuaciones tales que si admiten un número como raíz, admiten también como raíz el número recíproco. Es decir, si una ecuación tiene como raíz el número 3, para ser recíproca debe tener también como raíz el número $\frac{1}{3}$; si tiene como raíz el número $-\frac{2}{5}$, para ser recíproca debe admitir también como raíz el número $-\frac{5}{2}$; etc.

Se demuestra que en una ecuación recíproca los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales en valor absoluto, pero pueden tener igual o distinto signo. Por lo tanto, hay dos tipos de ecuaciones recíprocas.

1er. tipo: aquellas ecuaciones en que los términos equidistantes de los extremos son iguales en valor absoluto y signo. *2º tipo*:

aquellas ecuaciones en que los términos equidistantes de los extremos tienen igual valor absoluto pero distinto signo.

Así por ejemplo:

$$3x^6 - 7x^5 + 2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

es una ecuación recíproca del primer tipo.

$$2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

es una ecuación recíproca del segundo tipo.

Nos ocuparemos solamente de la resolución de ecuaciones recíprocas de 3er. y 4º grado pues éstas se resuelven mediante ecuaciones de 2º grado.

PRIMERO. Sea resolver una ecuación recíproca de 4º grado donde los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen el mismo signo, por ejemplo:

$$12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0 \qquad [1]$$

En efecto, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son: el del primero y último términos, iguales a 12; el del segundo y cuarto términos iguales a -4 y el del término central que es equidistante consigo mismo, igual a -41.

Se dividen ambos miembros de la ecuación por x^2 y se tiene:

$$12x^2 - 4x - 41 - 4 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

Se saca el factor común 12 entre el primero y el último términos y el factor común -4 entre el segundo y el penúltimo términos y resulta:

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0 \qquad [2]$$

Llamando z a la expresión $x + \frac{1}{x}$, es decir:

$$x + \frac{1}{x} = z \qquad [3]$$

El paréntesis del 2º término de la ecuación [2] es igual a z y para calcular el paréntesis $x^2 + \frac{1}{x^2}$ se eleva al cuadrado la igualdad [3], es decir:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2$$

desarrollando el cuadrado del binomio:

$$x^2 + 2\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{x^2} = z^2$$

de donde:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2$$

o sea:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2 \qquad [4]$$

que es el valor del primer paréntesis de [2], que buscábamos.

Reemplazando en dicha ecuación los paréntesis por sus valores según [4] y [3], se tiene:

$$12\left(z^2 - 2\right) - 4z - 41 = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$12z^2 - 24 - 4z - 41 = 0$$

y reduciendo los términos -24 y -41, resulta:

$$12z^2 - 4z - 65 = 0$$

ecuación de 2º grado cuya incógnita es z.

Luego, resolviendo esta ecuación aplicando la fórmula conocida, se tiene:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \times 12 \times 65}}{2 \times 12}$$

$$\therefore \quad z = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 3\,120}}{24}.$$

$$z = \frac{4 \pm 56}{24} \quad \therefore \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{4 + 56}{24} = \dfrac{60}{24} = \dfrac{5}{2} \\ z_2 = \dfrac{4 - 56}{24} = -\dfrac{52}{24} = -\dfrac{13}{6} \end{cases}.$$

Para obtener los cuatro valores de x que son las raíces de la ecuación dada [1], es preciso recordar el cambio de variable.

$$x + \frac{1}{x} = z$$

donde sabemos que z puede tomar los valores $\frac{5}{2}$ y $-\frac{13}{6}$.

Reemplazando z por cada uno de ellos en la igualdad anterior, se tiene:

1º para $z = \frac{5}{2}$

es:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

de donde multiplicando ambos miembros por x se tiene.

$$x^2 + 1 = \frac{5}{2}x$$

o sea:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

ecuación de 2º grado cuyas raíces son:

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \therefore \begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que son dos de las cuatro raíces de la ecuación dada [1]

2º para $z = -\frac{13}{6}$

es:
$$x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}$$

Multiplicando ambos miembros por x:

$$x^2 + 1 = -\frac{13}{6}x$$

o sea:

$$x^2 + \frac{13}{6}x + 1 = 0$$

ecuación de 2º grado cuyas raíces son

$$x = -\frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169}{144} - 1}$$

$$\therefore \; x = -\frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144}}$$

$$x = -\frac{13}{12} \pm \frac{5}{12} \therefore \begin{cases} x_1 = -\frac{13}{12} + \frac{5}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{13}{12} - \frac{5}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

que son las otras dos raíces de la ecuación dada [1].

Luego las cuatro raíces de la ecuación:

$$12\,x^4 - 4\,x^3 - 41\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$$

son :
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{2}{3} \\ x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto la resolución de este tipo de ecuaciones recíprocas se reduce mediante un cambio de variable, a la resolución de dos ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Puede observarse que las cuatro raíces:

$$2\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{2}{3}\ \text{y}\ -\frac{3}{2}\ ,$$

cumplen la condición ya anticipada de ser dos de ellas

$$\frac{1}{2}\ \text{y}\ -\frac{3}{2}$$

las recíprocas, respectivamente de las otras:

$$2\ \text{y}\ -\frac{2}{3}$$

Segundo. Sea resolver una ecuación recíproca de 4º grado donde los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen distinto signo, por ejemplo:

$$4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0 \qquad [1]$$

En efecto, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son: el del primero y el último términos, respectivamente iguales a 4 y -4, el del segundo y el penúltimo términos, respectivamente iguales a -17 y 17. Se observa que en este caso el término en x^2 no figura, pues por ser término central es equidistante de los extremos consigo mismo y por consiguiente no puede tener a la vez un signo y el contrario.

Para resolver esta ecuación, se saca el factor común 4 entre el primero y el último términos y el factor común $-17x$ entre el segundo y el penúltimo términos y se tiene así:

$$4(x^4 - 1) - 17x(x^2 - 1) = 0 \qquad [2]$$

Factoreando $(x^4 - 1)$ como diferencia de cuadrados, es decir:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

y reemplazando en [2], ésta se transforma en:

$$4(x^2 + 1)(x^2 - 1) - 17x(x^2 - 1) = 0$$

Sacando el factor común $(x^2 - 1)$, resulta:

$$(x^2 - 1)[4(x^2 + 1) - 17x] = 0 .$$

Se ha transformado así el primer miembro de la ecuación dada [1] en el producto de dos factores: el primer factor $(x^2 - 1)$ y el segundo factor $[4(x^2 + 1) - 17x]$.

Para que el producto de estos dos factores sea igual a 0, debe ser necesariamente 0 uno de los dos, es decir:

$$x^2 - 1 = 0$$

o bien $\qquad 4(x^2 + 1) - 17x = 0$

1º Si: $x^2 - 1 = 0$

es: $x^2 = 1 \therefore x = \pm \sqrt{1} \therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

que son dos de las cuatro raíces de la ecuación dada [1].

2º Si el otro factor es 0, es decir:

$$4(x^2 + 1) - 17x = 0$$

o sea:

$$4x^2 + 4 - 17x = 0$$

que es la ecuación de 2º grado:

$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

cuyas raíces son:

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 4 \times 4}}{2 \times 4}$$

$$\therefore \quad x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{8}$$

$$x = \frac{17 \pm 15}{8} \therefore \begin{cases} x_3 = \dfrac{17 + 15}{8} = \dfrac{32}{8} = 4 \\ x_4 = \dfrac{17 - 15}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

que son las otras dos raíces de la ecuación dada [1].

Luego las cuatro raíces de la ecuación recíproca:

$$4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0$$

son: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

NOTAS : 1º En las ecuaciones recíprocas del último tipo que hemos estudiado siempre figuran las raíces 1 y — 1 que son los únicos valores recíprocos de ellos mismos.

2º La resolución de este tipo de ecuaciones recíprocas, se reduce, mediante factoreo, a la resolución de dos ecuaciones de 2º grado con una incógnita.

TERCERO . Sea resolver una ecuación recíproca de 3er. grado donde los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen igual signo, por ejemplo:

$$12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0 \qquad [1]$$

En efecto, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son: el del primero y el último términos iguales a 12 y el del segundo y penúltimo términos iguales a — 13 .

Para resolver esta ecuación se saca el factor común 12 entre el primero y el último términos y el factor común $-13x$ entre el segundo y el penúltimo términos y se tiene

$$12(x^3 + 1) - 13x(x + 1) = 0 \qquad [2]$$

El paréntesis $x^3 + 1$, es suma de potencias de igual grado de exponente impar, en consecuencia puede factorearse en función de la suma de las bases $(x + 1)$, es decir:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Reemplazando en [2] , se tiene:

$$12(x + 1)(x^2 - x + 1) - 13x(x + 1) = 0$$

Se saca el factor común $(x + 1)$ y resulta:

$$(x + 1)[12(x^2 - x + 1) - 13x] = 0 \qquad [3]$$

Se ha transformado así el primer miembro de la ecuación dada [1] en el producto de los dos factores:

$$(x + 1) \quad \text{y} \quad [12(x^2 - x + 1) - 13x]$$

Para que dicho producto sea 0, debe ser necesariamente 0 uno de los dos factores:

1º Si el primer factor es igual a 0, es decir:

$$x + 1 = 0$$

es:
$$x_1 = -1$$

que es una de las tres raíces de la ecuación dada [1].

2º Si el segundo factor es igual a 0, es decir:

$$12\left(x^2 - x + 1\right) - 13x = 0$$

Resolviendo la operación indicada:

$$12x^2 - 12x + 12 - 13x = 0$$

Reuniendo los términos semejantes $-12x$ y $-13x$, resulta:

$$12x^2 - 25x + 12 = 0,$$

ecuación de 2º grado cuyas raíces son:

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 12 \times 12}}{2 \times 12}$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24}$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24}$$

$$x = \frac{25 \pm 7}{24} \;\therefore\; \begin{cases} x_2 = \dfrac{25 + 7}{24} = \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3} \\ x_3 = \dfrac{25 - 7}{24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

que son las otras dos raíces de la ecuación dada [1].

Luego las tres raíces de la ecuación recíproca dada:

$$12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0$$

son: $$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \\ x_3 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN: La resolución de las ecuaciones recíprocas de este tipo se reducen, mediante factoreo, a la resolución de dos ecuaciones, una de primer grado y otra de segundo grado.

CUARTO. Sea resolver una ecuación recíproca de tercer grado donde los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen distinto signo, por ejemplo:

$$3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0 \qquad [1]$$

En efecto, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son: el del primero y último términos, respectivamente iguales a 3 y -3 y el del segundo y penúltimo términos iguales respectivamente a 7 y -7.

Las ecuaciones de este tipo se resuelven en forma completamente análoga a las del tipo anterior, es decir: se saca el factor común 3 entre el primero y el último términos y el factor común $7x$ entre el segundo y el penúltimo términos; queda así:

$$3(x^3 - 1) + 7x(x - 1) = 0 \qquad [2]$$

El primer paréntesis $(x^3 - 1)$ es la diferencia de dos potencias de igual grado impar, luego se puede factorear en función de la diferencia de las bases $(x - 1)$, es decir:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Reemplazando en [2], se obtiene:

$$3(x - 1)(x^2 + x + 1) + 7x(x - 1) = 0$$

Se saca el factor común $(x - 1)$ y resulta:

$$(x - 1)\left[3\left(x^2 + x + 1\right) + 7x\right] = 0$$

El primer miembro de la ecuación dada [1] se ha transformado así en el producto de los dos factores:

$$(x - 1) \quad y \quad \left[3\left(x^2 + x + 1\right) + 7x\right]$$

Para que este producto sea cero, debe ser necesariamente cero, uno de los dos factores.

1º Si el primer factor es cero, es decir:

si: $\quad x - 1 = 0$

es: $\quad x_1 = 1$

que es una de las tres raíces de la ecuación dada [1].

2º Si el segundo factor es cero, es decir:

si: $\quad 3\left(x^2 + x + 1\right) + 7x = 0$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$3x^2 + 3x + 3 + 7x = 0 \; .$$

Reduciendo los términos semejantes $3x$ y $7x$, resulta:

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \; ,$$

ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$x = \frac{-10 \pm 8}{6} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{-10 + 8}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\[2ex] x_3 = \dfrac{-10 - 8}{6} = -\dfrac{18}{6} = -3 \end{cases}$$

que son las otras dos raíces de la ecuación dada.

Luego las tres raíces de la ecuación dada:

$$3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$$

son : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 = -3 \end{cases}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Resolver las siguientes ecuaciones recíprocas:

1º) $12x^4 - 11x^3 - 146x^2 - 11x + 12 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 = 4 \\ x_4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

2º) $8x^4 + 54x^3 + 101x^2 + 54x + 8 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -4 \\ x_4 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

3º) $30x^4 + 91x^3 - 278x^2 + 91x + 30 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -\dfrac{1}{5} \\ x_3 = \dfrac{3}{2} \\ x_4 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

4º) $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

5º) $100x^4 - 1\,300x^3 + 3\,129x^2 - 1\,300x + 100 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = \dfrac{1}{10} \\ x_3 = \dfrac{2}{5} \\ x_4 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

6º) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

7º) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

8º) $12x^4 + 25x^3 - 25x - 12 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{3}{4} \\ x_4 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

9º) $10x^4 + 29x^3 - 29x - 10 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{5}{2} \\ x_4 = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

10º) $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

11º) $20x^4 + 41x^3 - 41x - 20 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{4}{5} \\ x_4 = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

12º) $6x^4 + 37x^3 - 37x - 6 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{6} \\ x_4 = -6 \end{cases}$

13º) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

14º) $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

15º) $6x^3 + 19x^2 + 19x + 6 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \\ x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

16º) $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \\ x_3 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

17º) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -2 \end{cases}$

18º) $35x^3 + 109x^2 + 109x + 35 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{7} \\ x_3 = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$

19º) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

20º) $12x^3 - 37x^2 + 37x - 12 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{3}{4} \\ x_3 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

21º) $15x^3 + 19x^2 - 19x - 15 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \\ x_3 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$

22º) $6x^3 - 43x^2 + 43x - 6 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

23º) $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

24º) $90x^3 + 91x^2 - 91x - 90 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{9}{10} \\ x_3 = -\dfrac{10}{9} \end{cases}$

25º) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$

Respuesta: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

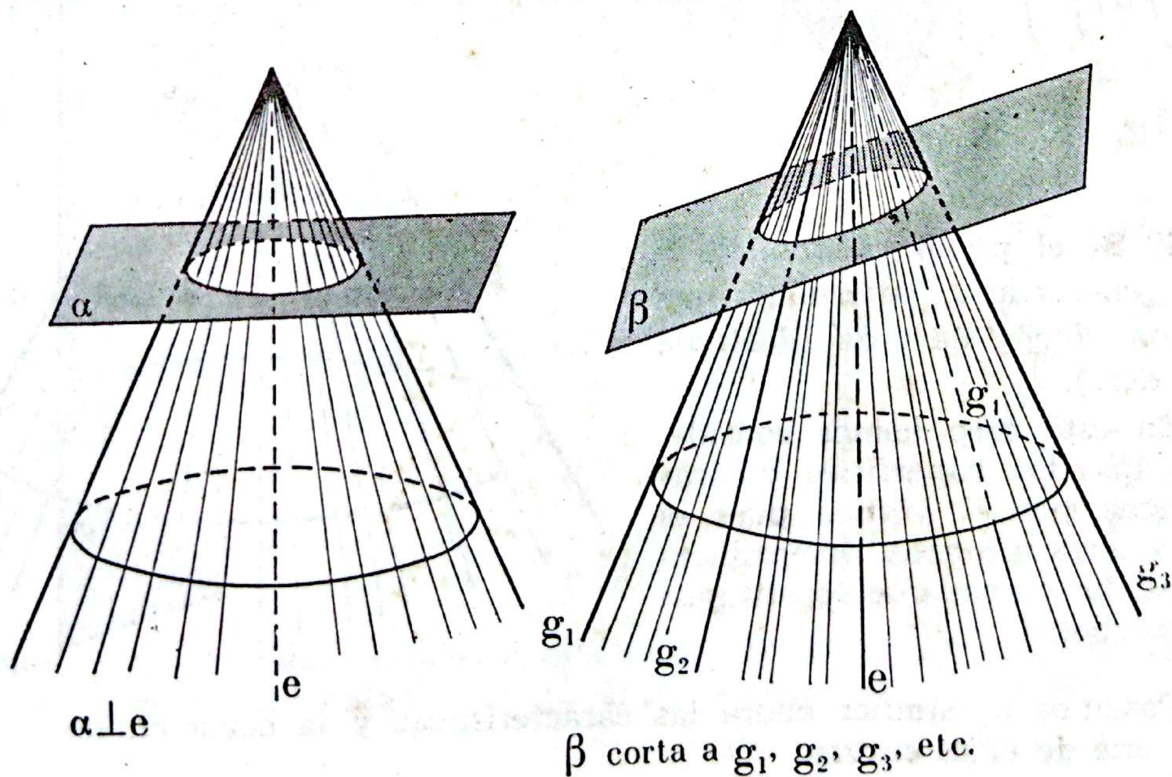
CAPÍTULO VIII.

SECCIONES CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, HIPÉRBOLA Y PARÁBOLA.

1. Secciones cónicas. — Al cortar una superficie cónica circular recta con un plano, según la posición de este plano con respecto al eje y a las generatrices de la superficie cónica, resultan como intersecciones distintas curvas, que por provenir de seccionar una superficie cónica, reciben el nombre de *secciones cónicas* y que estudiamos a continuación:

1º Si el plano que secciona a la superficie cónica es perpendicular al eje de la superficie, se obtiene una *circunferencia* (fig. izq.).

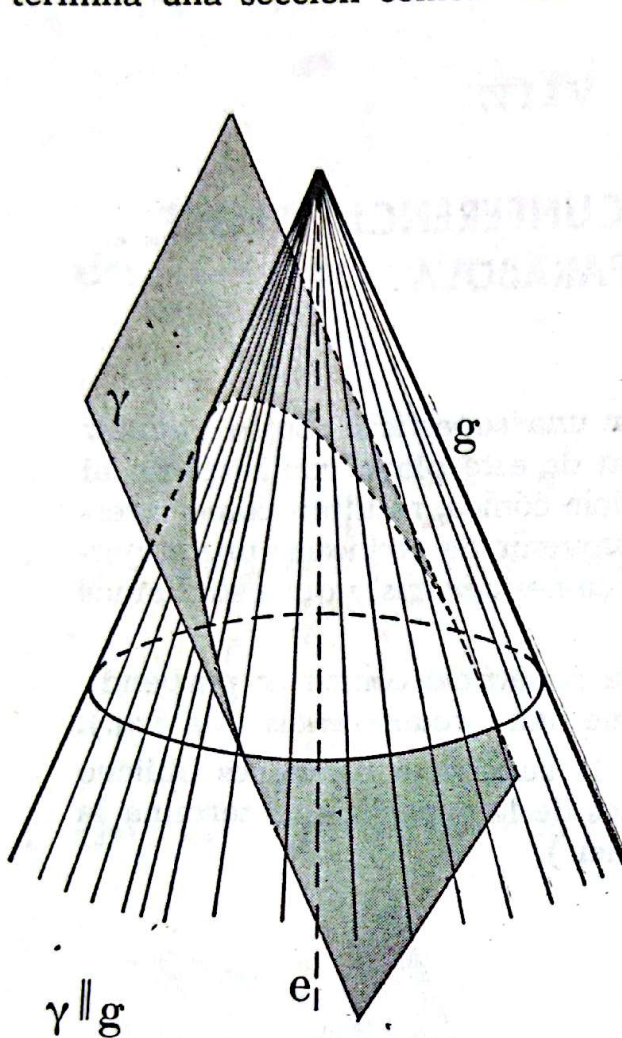
2º Si el plano que secciona a la superficie cónica es oblicuo al eje y corta a todas las generatrices de la superficie, determina la sección cónica llamada *elipse* (fig. der.).

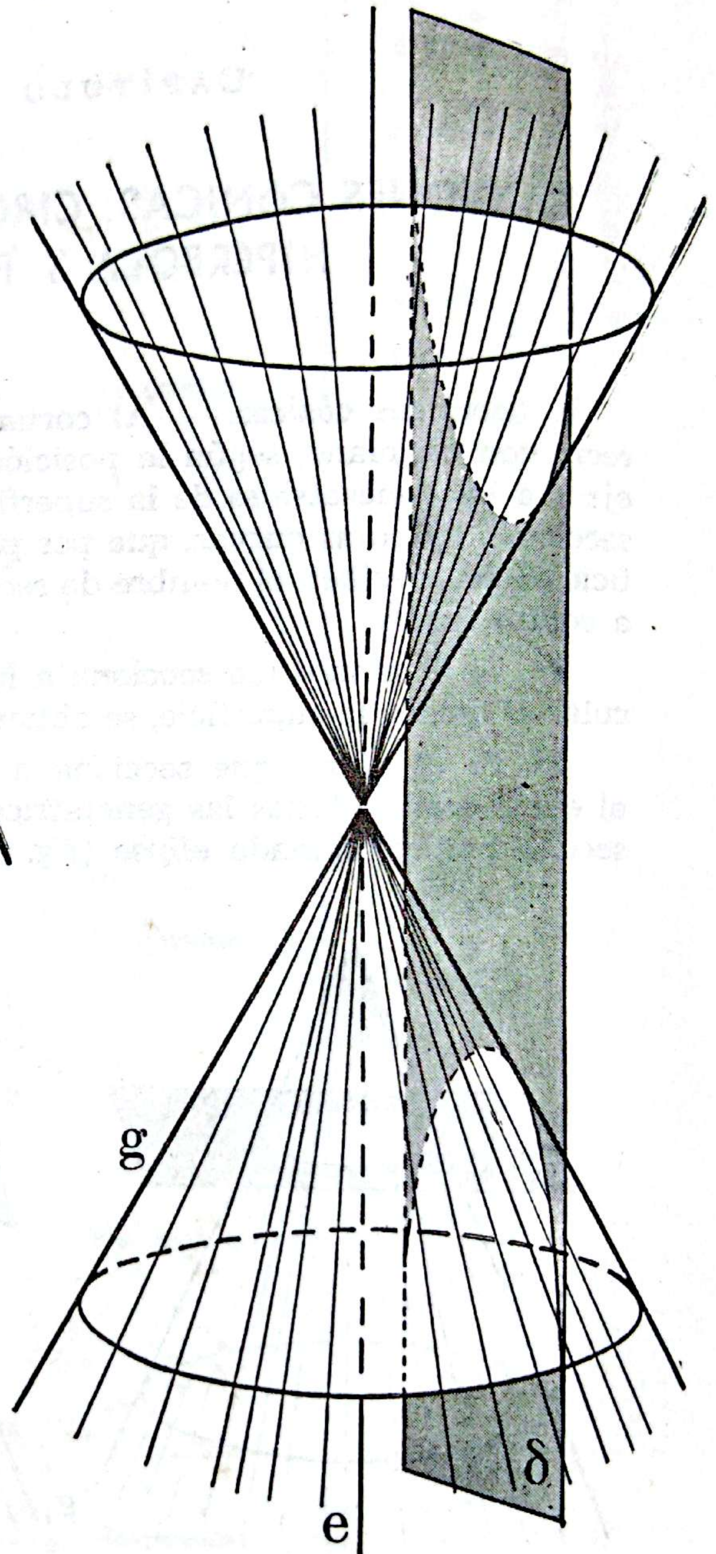


$\alpha \perp e$

β corta a g_1, g_2, g_3, etc.

3º Si el plano es oblicuo al eje y paralelo a una generatriz determina una sección cónica llamada *parábola* (fig. izq.).





4º Si el plano es paralelo a dos generatrices, determina una sección cónica llamada *hipérbola* (fig. der.).

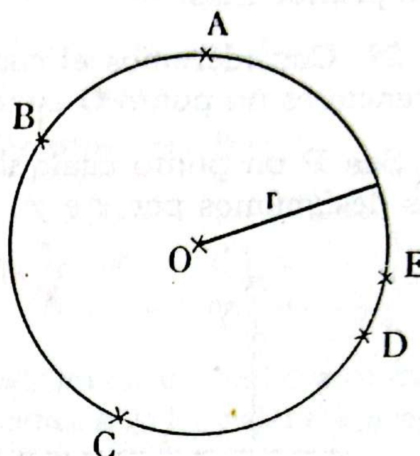
En este caso hemos considerado las dos superficies cónicas opuestas por el vértice pues el plano corta a ambas, determinando las dos ramas que constituyen la hipérbola.

Pasamos a estudiar ahora las características y la ecuación de cada una de estas curvas.

CIRCUNFERENCIA.

De acuerdo con la definición dada en geometría, se llama circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de otro fijo llamado centro.

La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama *radio* de la circunferencia. Luego, dado el punto O y el segmento r se llama circunferencia de centro O y radio r, que se indica $C_{(O\ y\ r)}$ al conjunto de los puntos A. B, C, etc., del plano que se encuentran de O a una distancia igual a r.

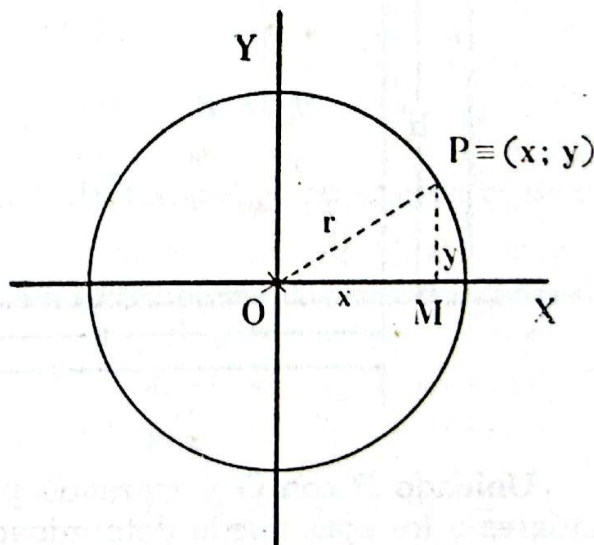


2. Ecuación cartesiana de la circunferencia. — Vamos a encontrar ahora la ecuación de la circunferencia referida a ejes cartesianos octogonales.

1º Consideremos una circunferencia cuyo centro coincida con el origen de coordenadas.

Sea P un punto cualquiera de la circunferencia cuyas coordenadas designamos por x e y. Trazando estas coordenadas y uniendo P con O. queda determinado el triángulo rectángulo PMO.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:



$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 ,$$

de donde, reemplazando:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

o sea:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación de la circunferencia referida a ejes cartesianos y cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas.

Ejemplo :

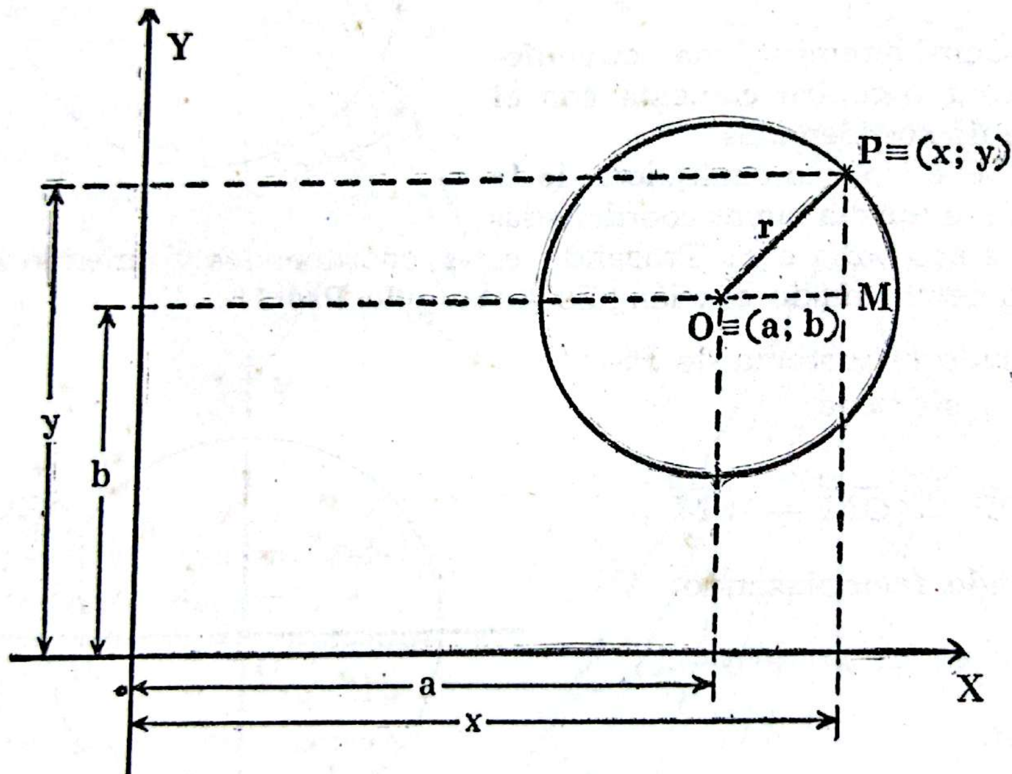
$$x^2 + y^2 = 25$$

representa la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y radio igual a $\sqrt{25} = 5$.

Hemos tratado independientemente este caso en que el centro de la circunferencia coincide con el origen, pues si bien, es un caso particular de la ecuación general, que pasamos a estudiar, los autores consideran que en la mayoría de los cursos basta tratar únicamente este primer caso.

2º Consideremos el caso general en que el centro de la circunferencia es un punto O cualquiera de coordenadas a y b.

Sea P un punto cualquiera de la circunferencia cuyas coordenadas designamos por x e y.



Uniendo P con O y trazando por esos dos puntos las perpendiculares a los ejes, queda determinado el triángulo rectángulo OMP.

Aplicando en él, el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 \qquad [1]$$

Pero :

$$\overline{OM} = x - a$$
$$\overline{PM} = y - b$$
y $$\overline{OP} = r$$

Luego reemplazando en [1] resulta:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desarrollando los cuadrados del primer miembro:

$$x^2 - 2\,ax + a^2 + y^2 - 2\,by + b^2 = r^2 .$$

Pasando r^2 al primer miembro y ordenando, resulta:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0}$$

que es la ecuación general de la circunferencia, de radio r y cuyo centro es el punto del plano de coordenadas a y b, referida a ejes cartesianos.

Encerramos en un paréntesis los 3 últimos términos por ser términos independientes donde no figura la x ni la y.

EJEMPLO :

$$x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y - 3 = 0$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 4 y cuyo centro tiene por coordenadas 2 y 3.

En efecto: comparando esta ecuación particular con la general, resulta:

$$2\,a = 4 \qquad \therefore \quad a = 2$$

$$2\,b = 6 \qquad \therefore \quad b = 3$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = -3 \qquad \therefore \quad r^2 = a^2 + b^2 + 3$$

sea : $$\therefore\ r^2 = 4 + 9 + 3$$

$$\therefore\ r^2 = 16$$

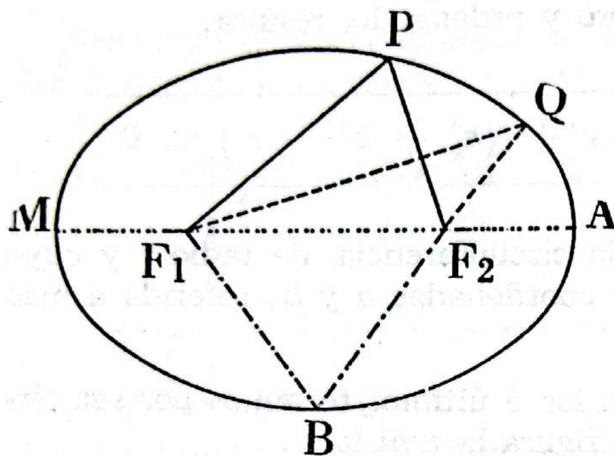
$$\therefore\ r = 4$$

Observación : Se ve que la fórmula general contiene como caso particular el estudiado en primer término, o sea aquel en que el centro coincide con el origen, pues en tal caso las coordenadas *a* y *b* son iguales a cero; por lo tanto en la fórmula general se anulan todos los términos en que ellas figuran y se reduce a:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

idéntica a la fórmula: $x^2 + y^2 = r^2$ que ya habíamos obtenido.

ELIPSE.

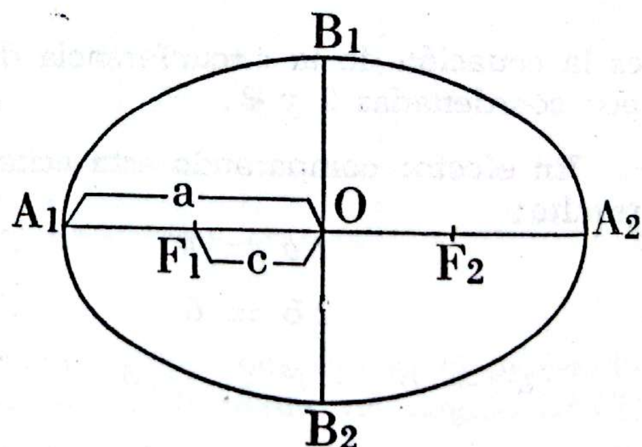


3. Definición. — Dados en el plano dos puntos fijos llamados *focos* se llama elipse al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante.

Así en la elipse de la figura, F_1 y F_2 son los focos y se verifica que:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2}$$

El segmento $A_1 A_2$, que tiene por extremos la intersección de la recta de los focos con la elipse, se llama *diámetro mayor;* el segmento $F_1 F_2$, determinado por los focos, es la *distancia focal* y el punto O, punto medio de la distancia focal y del diámetro mayor se llama *centro* de la elipse; el segmento $B_1 B_2$ perpendicular al diámetro mayor, que pasa por el centro de la elipse se llama *diámetro menor*.



El semidiámetro mayor se designa por a; luego:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a$$
$$\therefore \quad \overline{A_1 A_2} = 2a$$

El semidiámetro menor se designa por b; luego:

$$\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = b$$
$$\therefore \quad \overline{B_1 B_2} = 2b$$

La semidistancia focal se designa por c; luego

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$$
$$\therefore \quad \overline{F_1 F_2} = 2c$$

La razón entre la distancia focal y el diámetro mayor se llama *excentricidad* y se designa por e, es decir:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Cuanto mayor es la excentricidad tanto más alargada es la elipse y cuanto menor es la excentricidad tanto más se aproxima a una circunferencia.

Calculemos la suma de las distancias del punto A_1 a cada uno de los focos (fig. anterior).

Como $\overline{A_1 F_1} = a - c$

$\overline{A_1 F_2} = a + c$

Sumando m. a. m. $\overline{A_1 F_1} + \overline{A_1 F_2} = a - \cancel{c} + a + \cancel{c}$

y reduciendo en el 2º miembro

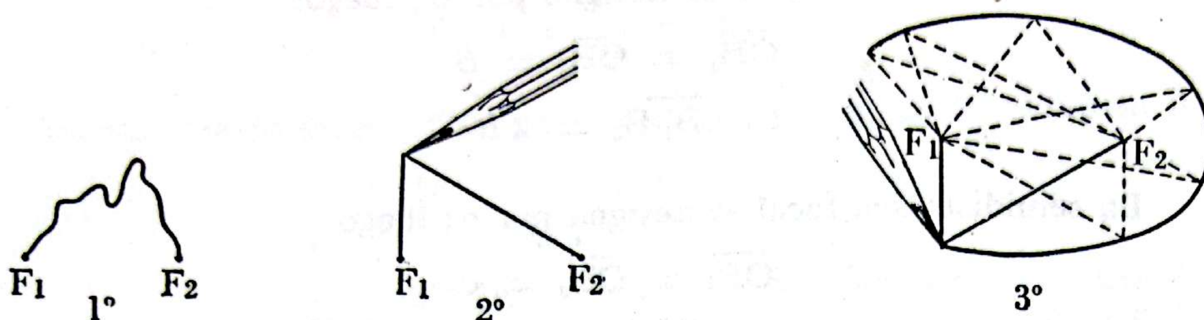
$$\overline{A_1 F_1} + \overline{A_1 F_2} = 2a\,.$$

Como A_1 es un punto de la elipse queda probado en general que la suma constante de las distancias de un punto cualquiera a cada uno de los focos es igual al diámetro mayor.

Así en la primera figura del parágrafo 3,

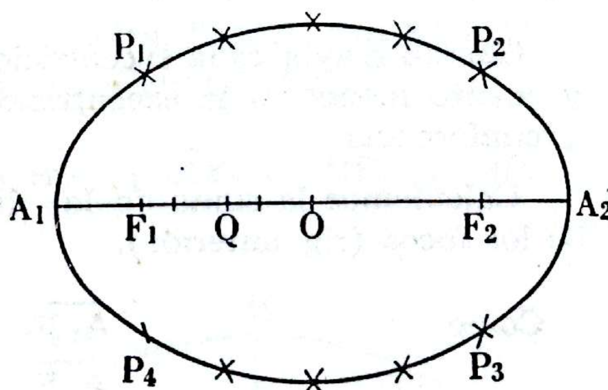
$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{MA}$$

4. Construcción de la elipse. — 1º Un método práctico para la construcción de la elipse es el siguiente, conocido como método del jardinero. Se toma un hilo de longitud igual al diámetro mayor de la elipse o sea $2a$. Elegidos los focos F_1 y F_2 se fija en cada uno de ellos con una chinche un extremo del hilo. Con la punta de un



lápiz se extiende el hilo y al deslizar el lápiz manteniendo siempre el hilo tenso la punta del lápiz describe una elipse. En efecto cualquier punto de la curva cumple la condición de que la suma de sus distancias a los focos es igual a la longitud del hilo que es igual a $2a$.

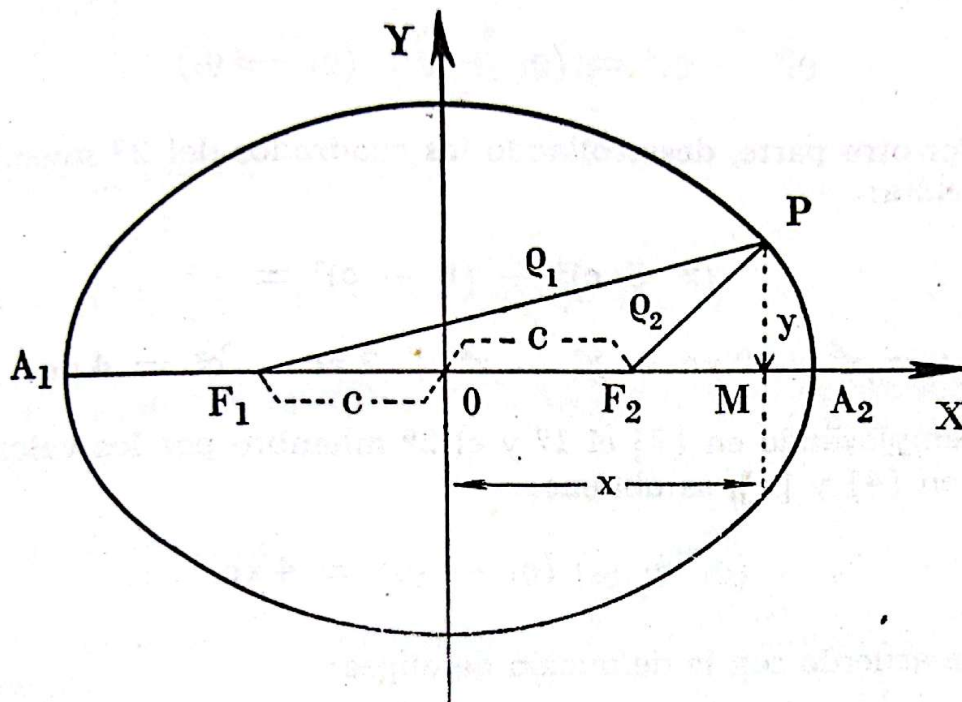
2º *Método.* Se determina el diámetro mayor $\overline{A_1 A_2}$, el centro O y equidistantes de él, los focos F_1 y F_2. Si considera un punto cualquiera de $\overline{F_1 F_2}$, el Q por ejemplo. Haciendo centro en cada uno de los focos se trazan arcos de circunferencia de radio $\overline{A_1 Q}$; con centro en los mismos puntos F_1 y F_2, pero con radio $A_2 Q$ se cortan dichos arcos. Se obtienen así 4 puntos de la elipse: P_1, P_2, P_3 y P_4. Variando la posición del punto Q se van obteniendo cada vez cuatro puntos distintos de la elipse. Determinados por lo menos 12 puntos de la misma más los extremos del diámetro mayor se puede completar aproximadamente el trazado de la elipse.



5. Ecuación de la elipse. — Cuando el centro de la elipse coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, y los diámetros pertenecen a los ejes de ese sistema, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En efecto: consideremos un punto cualquiera de la elipse, por ejemplo el P, de coordenadas x e y.



Designando con: ϱ_1 y ϱ_2, respectivamente, las distancias de ese punto a los focos F_1 y F_2, es decir:

$$\varrho_1 = \overline{PF_1}$$

$$\varrho_2 = \overline{PF_2}$$

se tiene:

En el $\overset{\triangle}{PMF_1}$ rectáng.:

$$\varrho_1^2 = \overline{F_1M}^2 + \overline{PM}^2 = (x + c)^2 + y^2 \qquad [1]$$

En el $\overset{\triangle}{PMF_2}$ rectáng.:

$$\varrho_2^2 = F_2M^2 + PM^2 = (x - c)^2 + y^2 \qquad [2]$$

Restando m. a. m. [1] y [2] :

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (x + c)^2 + \cancel{y^2} - (x - c)^2 - \cancel{y^2} \qquad [3]$$

Siendo la diferencia de cuadrados igual al producto de la suma por la diferencia de las bases, el primer miembro de [3] es:

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (\varrho_1 + \varrho_2)\ (\varrho_1 - \varrho_2) \qquad [4]$$

Por otra parte, desarrollando los cuadrados del 2º miembro de [3] resulta:

$$(x + c)^2 - (x - c)^2 =$$

$$= \cancel{x^2} + 2\,xc + \cancel{c^2} - \cancel{x^2} + 2\,xc - \cancel{c^2} = 4\,xc \qquad [5]$$

Reemplazando en [3] el 1º y el 2º miembro por los valores hallados en [4] y [5], se obtiene:

$$(\varrho_1 + \varrho_2)\ (\varrho_1 - \varrho_2) = 4\,xc \qquad [6]$$

pero de acuerdo con la definición de elipse:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2\,a \qquad [7]$$

luego, reemplazando en [6]

$$2\,a\,(\varrho_1 - \varrho_2) = 4\,xc$$

o sea:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{4\,xc}{2\,a} = \frac{2\,xc}{a} \qquad [8]$$

Sumando miembro a miembro [7] y [8], se tiene:

$$\varrho_1 + \cancel{\varrho_2} + \varrho_1 - \cancel{\varrho_2} = 2\,a + \frac{2\,xc}{a}$$

o sea:

$$\cancel{2}\,\varrho_1 = \cancel{2}\left(a + \frac{x\,c}{a}\right)$$

$$\therefore \quad \varrho_1 = a + \frac{x\,c}{a} \quad \text{y} \quad \varrho_1^2 = \left(a + \frac{x\,c}{a} \right)^2 \qquad [9]$$

Reemplazando en el primer miembro de [1] se tiene:

$$\left(a + \frac{x\,c}{a} \right)^2 = \left(x + c \right)^2 + y^2$$

Desarrollando los cuadrados:

$$a^2 + 2\,\frac{a\,x\,c}{a} + \frac{x^2\,c^2}{a^2} = x^2 + 2\,xc + c^2 + y^2$$

pasando c^2 al primer miembro y las dos fracciones al segundo miembro, resulta:

$$a^2 - c^2 = x^2 + 2\,xc + y^2 - 2\,xc - \frac{x^2\,c^2}{a^2}$$

Reduciendo a común denominador el 1º y el último términos del 2º miembro:

$$a^2 - c^2 = \frac{a^2\,x^2 - x^2\,c^2}{a^2} + y^2$$

o sea:

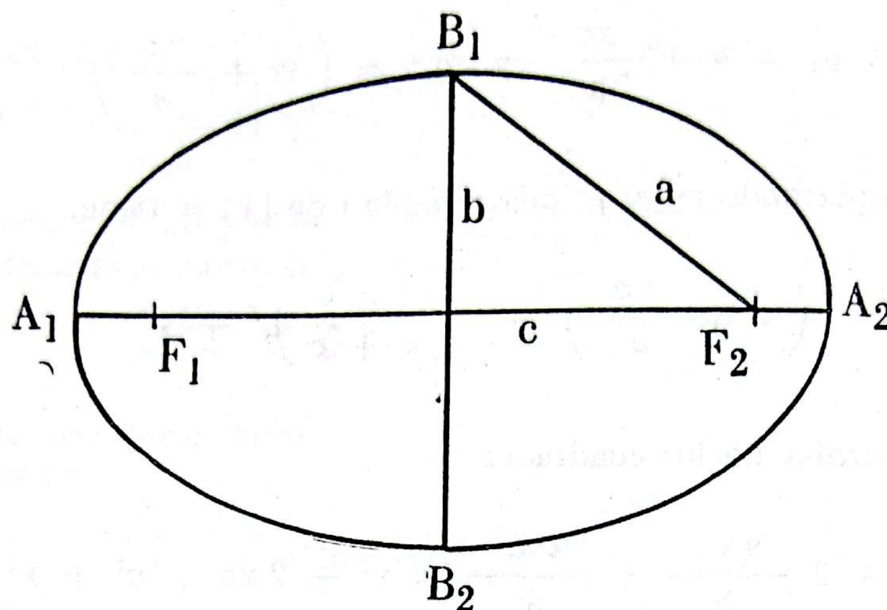
$$a^2 - c^2 = \frac{x^2}{a^2}\left(a^2 - c^2 \right) + y^2 \qquad [10]$$

Por otra parte (fig. sig.).

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Luego: reemplazando en [10] se tiene:

$$b^2 = \frac{x^2}{a^2} \cdot b^2 + y^2$$



Dividiendo ambos miembros por b^2, resulta:

$$\frac{b^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{b^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$\therefore$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

o sea:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

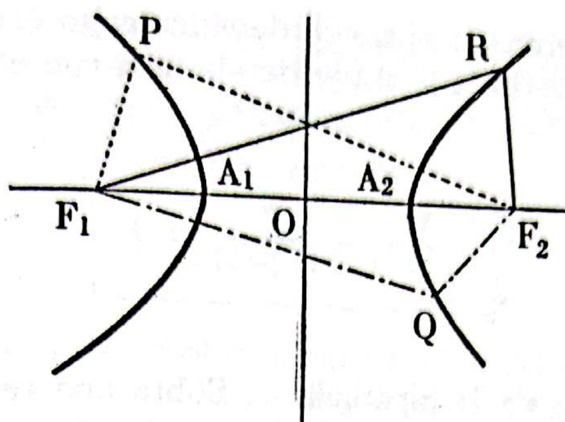
que es la ecuación buscada.

HIPÉRBOLA.

6. Definición. — Dados en el plano 2 puntos fijos llamados focos, se llama hipérbola al lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la diferencia entre sus distancias a cada uno de los focos es constante.

Así, en la hipérbola de la figura siguiente los focos son F_1 y F_2 y se verifica que:

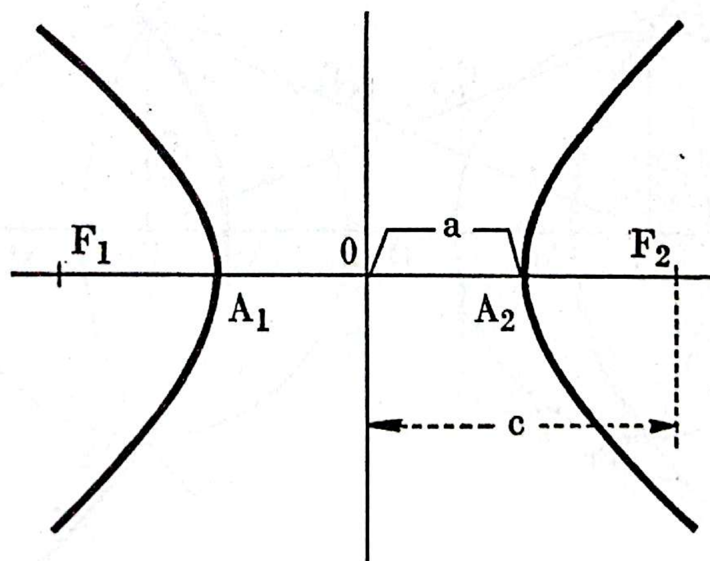
$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{RF_1} - \overline{RF_2}$$



Los puntos A_1 y A_2 en que la recta $F_1 F_2$ corta la hipérbola se llaman *vértices* de la hipérbola; el segmento $F_1 F_2$ determinado por los focos, es la *distancia focal* y el punto O, punto medio del segmento $\overline{A_1 A_2}$ y de la distancia focal se llama *centro* de la hipérbola.

La semidistancia focal se designa por c; luego:

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c \therefore \overline{F_1 F_2} = 2c$$



La distancia entre el centro y cada uno de los vértices se designa por a, luego:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a \therefore \overline{A_1 A_2} = 2a$$

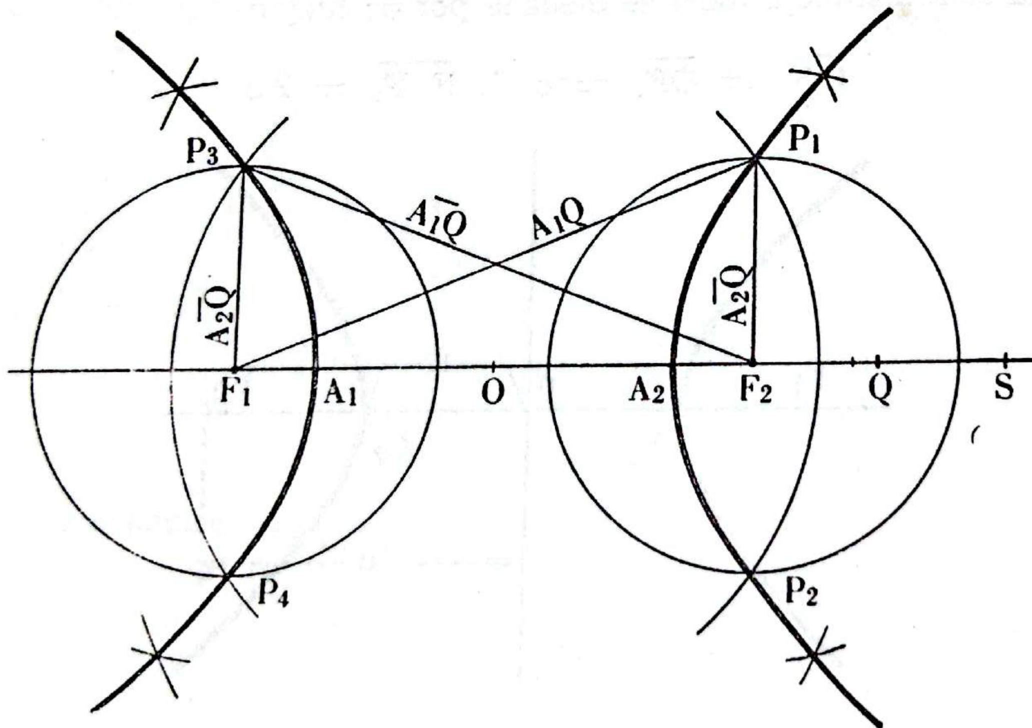
La diferencia $c^2 - a^2$ se designa por b^2.

Con un procedimiento análogo al seguido para la demostración de la ecuación de la elipse, se deduce que la ecuación de la hipérbola,

referida a un sistema de ejes coordenados cuyo origen coincide con el centro de la hipérbola y el eje de abscisas con el eje de los focos, es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

7. **Construcción de la hipérbola.** — Sobre una recta se determina un punto O y equidistantes de O, los puntos A_1 y A_2 vértices de la hipérbola tales que: $\overline{A_1 A_2} = 2a$. También equidistantes de O y sobre la misma recta se determinan los dos puntos F_1 y F_2 focos de la misma y tales que $\overline{F_1 F_2} = 2c$. Como es sabido $\overline{A_1 A_2}$ debe ser menor que $\overline{F_1 F_2}$. Tenemos ya 2 puntos de la hipérbola: A_1 y A_2.



Para determinar otros puntos se procede así: se elige sobre la recta considerada un punto cualquiera Q exterior al $\overline{F_1 F_2}$. Con centro en F_2 se traza una circunferencia de radio $\overline{A_2 Q}$ y con centro en F_1 otra circunferencia de radio $\overline{A_1 Q}$ que corta a la anterior en dos puntos P_1 y P_2 de una de las ramas de la hipérbola. Trazando circunferencias iguales a las anteriores, pero permutando los centros, es decir con centro en F_1 una circunferencia de radio $\overline{A_2 Q}$ y con centro en

F_2 la de radio $\overline{A_1 Q}$ quedan determinados otros dos puntos P_3 y P_4 de la rama de la hipérbola. Variando la posición del punto Q se obtienen cada vez dos pares de puntos diferentes de la hipérbola.

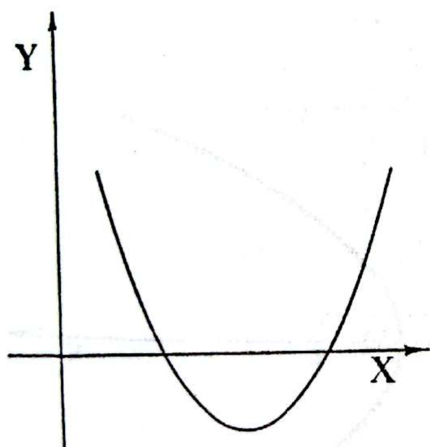
PARÁBOLA.

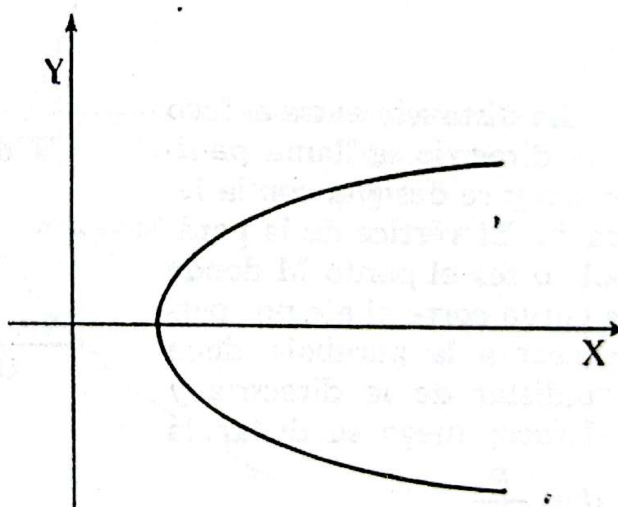
8. Al considerar la resolución gráfica de las ecuaciones de segundo grado hemos estudiado ya la parábola, pero en el caso particular en que el eje es paralelo al eje de ordenadas, como representación de la función de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{(fig. izq.)}$$

Si permutamos la x con la y, resulta de la forma:

$$x = ay^2 + by + c \qquad \text{(fig. der.)}$$



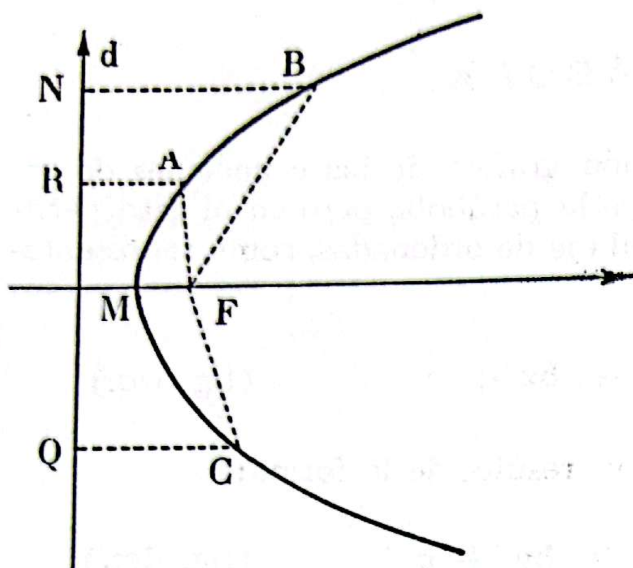


9. Pasamos a considerar ahora la definición de esta curva dada mediante sus propiedades focales.

Definición. Dados en un plano una recta y un punto exterior se llama parábola al lugar geométrico de los puntos de ese plano que equidistan de la recta y del punto.

Dicha recta que se llama *directriz* de la parábola es perpendicular al eje de la parábola y se designa por d y el punto llamado

foco de la parábola pertenece a dicho eje y se designa por **F**. Luego, si los puntos **A**, **B** y **C** pertenecen a la parábola, debe verificarse, de acuerdo con la definición, que

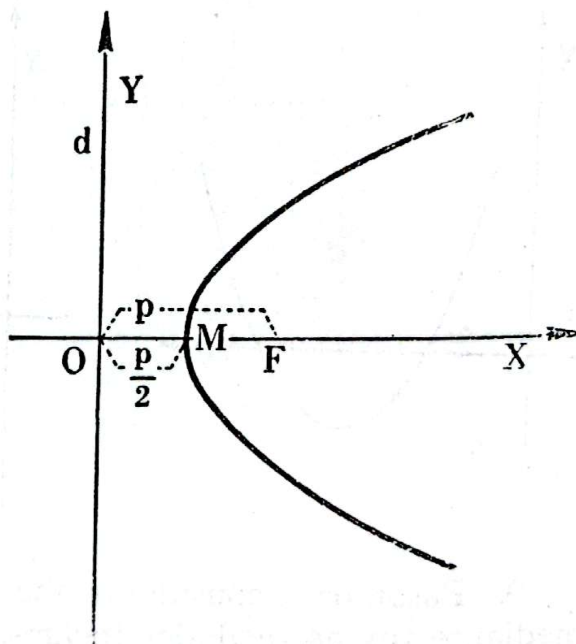


$$\overline{AR} = \overline{AF}$$

$$\overline{BN} = \overline{BF}$$

$$\overline{CQ} = \overline{CF}$$

La distancia entre el foco y la directriz se llama *parámetro* y se designa con la letra p. El vértice de la parábola o sea el punto M donde la curva corta al eje por pertenecer a la parábola debe equidistar de la directriz y del foco; luego su distancia a d es $\frac{p}{2}$.

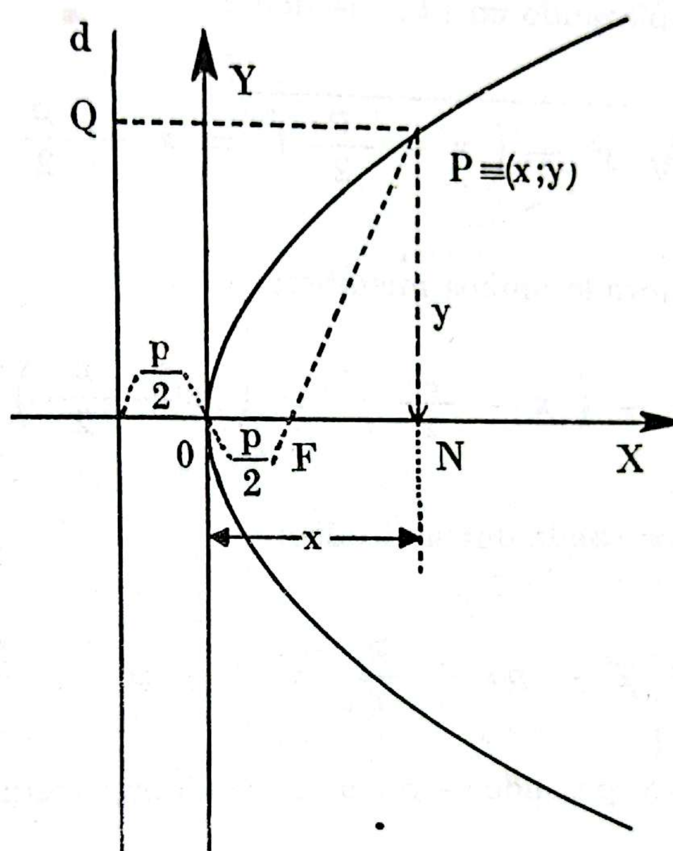


10. Ecuación de la parábola en función del parámetro. — Teniendo en cuenta la definición de la parábola como lugar geométrico, vamos a encontrar la ecuación de la misma en función del parámetro.

Consideremos una parábola cuyo vértice coincida con el origen de coordenadas y cuyo eje coincida con el eje de abscisas. En con-

secuencia el eje y es tangente a la parábola en el vértice. Tracemos la directriz d que debe ser perpendicular al eje de la parábola y estar a una distancia del vértice igual a $\frac{p}{2}$ y determinemos el foco F sobre el eje. La abscisa de este punto debe ser $\frac{p}{2}$.

Sea $P \equiv (x\,;y)$ un punto cualquiera de la curva; tracemos $\overline{PQ}$ distancia de P a la directriz y $\overline{PF}$ distancia del punto P al foco.



Por la definición de parábola como lugar geométrico debe verificarse que:

$$\overline{PF} = \overline{PQ} \qquad [1]$$

Pero $\overline{PF}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo PNF; luego por el corolario del teorema de Pitágoras es:

$$\overline{PF} = \sqrt{PN^2 + FN^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$y \quad \overline{PQ} = x + \frac{p}{2}$$

Luego reemplazando en [1], se tiene:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

desarrollando los cuadrados indicados:

$$y^2 + \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}}$$

Reduciendo y pasando $-px$ al 2º miembro, resulta:

$$y^2 = px + px$$

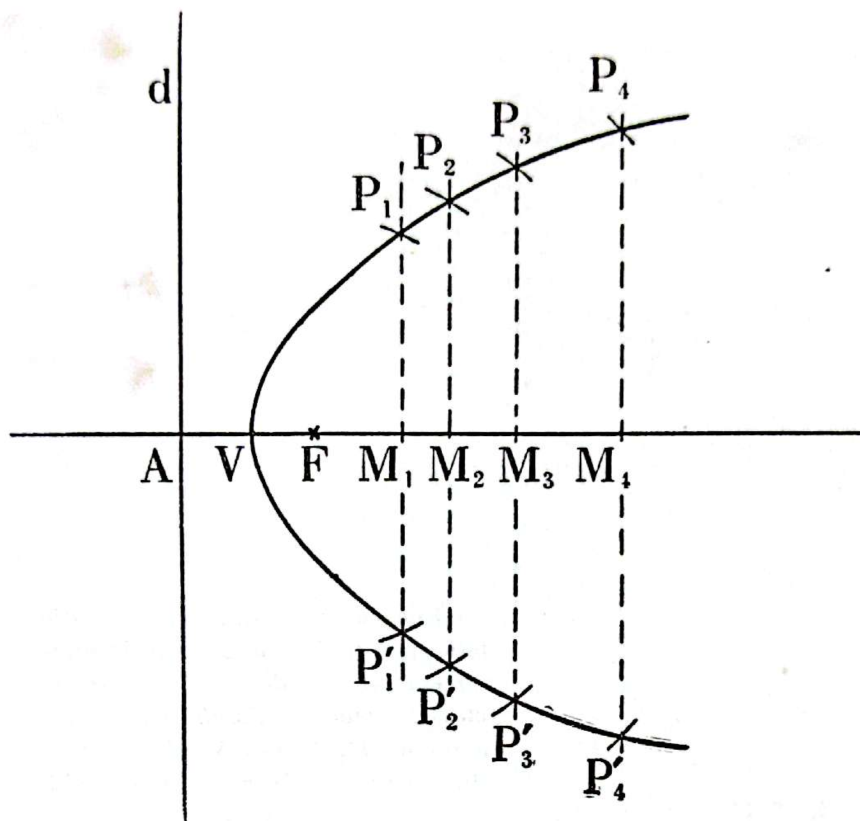
o sea:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

que es la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de un sistema de coordenadas y cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

11. Construcción de la parábola. Dados la directriz *d* y el foco F, se pueden determinar los puntos de la parábola en la siguiente forma:

Primero se traza por el punto F la perpendicular a la recta d, que corta a ésta en A. Se determina el punto medio del segmento $\overline{AF}$, que es el vértice V de la parábola. En la semirrecta $\overrightarrow{VF}$ se marca un punto cualquiera, el M, por ejemplo.

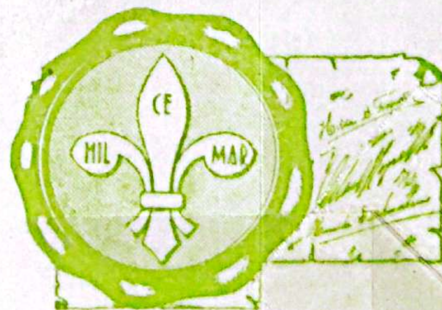


Por M_1 se traza la perpendicular a la recta AF, y con centro en F y radio $\overline{AM_1}$ se corta la perpendicular anterior en los puntos P_1 y P'_1, que pertenecen a la parábola.

Repitiendo la operación con otros puntos: M_2, M_3, M_4, etc., de la $\overrightarrow{VF}$, se obtienen otros pares de puntos de la parábola. P_2 y P'_2, P_3 y P'_3; P_4 y P'_4, etc. Uniendo todos estos puntos se obtiene la parábola de foco F y directriz *d*.

La Editorial Kapelusz, S. A., *dio término a la 2ª tirada de la decimotercera edición de esta obra en el mes de enero de 1963, en los talleres de La Prensa Médica Argentina, Aniceto López, Junín 845, Buenos Aires.*

K - 7787


CE
MIL
MAR
Aritmética y Algebra 4º año

